Lhuilier's,

Professor der Mathematik in Genf,

Anleitung

zur

Elementar Algebra.

Zweyter und lezter Theil.

Tübingen,
in der J. G. Cotta'schen Buchhandlung. 1801.

Inhalt.

Sechstes Kapitel.

Von den arithmetischen Proportionen und Progressionen. Seite 3.

Siebentes Kapitel.

Ueber die unbestimmten Aufgaben vom ersten Grade. — 32.

Achtes Kapitel.

Ueber die figurirten Zahlen. — 73.

Neuntes Kapitel.

Ueber Permutationen und Combinationen. — 85.

Zehentes Kapitel.

Entwiklung des Binomialtheorems für einen ganzen und positiven Exponenten. — 110.

Eilftes Kapitel.

Entwiklung des Binomialtheorems für jeden Exponenten. — 120.

Zwölftes Kapitel.

Ueber geometrisch Reyheen und Logarithmen. — 155.

Dreyzehentes Kapitel.

Einleitung in die Methode der unbestimmten Coefficienten, und Anwendungen dieser Methode auf die Entwiklung einiger Funktionen und auf Summationen verschiedener Reyhen. Seite 182.

Vierzehentes Kapitel.

Ueber die Construction der logarithmischen Tafeln. — 203.

Zusaz über die Logarithmen negativer und imaginärer Grösse. — 221.

Fünfzehentes Kapitel.

Ueber die Summationen geometrischer Progressionen und verschiedener davon abhängender Reyhen. — 225.

Sechzehentes Kapitel.

Ueber die stetigen Brüche. — 333.

Siebenzehentes Kapitel.

Ueber unbestimmte Aufgaben vom zweyten Grade. — 385.

Der Zusaz zu §. 131, S. 65-72; und das sechzehente und siebenzehente Kapitel sind von M. K. F. Hauber, Repetenten am theologischen Stifte zu Tübingen hinzugefügt worden.

Sechstes Kapitel.

Von den arithmetischen Proportionen und Progressionen.

§. 111.

Wenn man sich mit der Vergleichung zweyer Größen in der Absicht beschäftigt, ihren Unterschied kennen zu lernen; so sagt man, daß man sich mit dem arithmetischen Verhältnis dieser beyden Größen beschäftige. Das Resultat dieser Vergleichung oder der gefundene Unterschied dieser beyden Größen heißt der Exponent dieses Verhältnisses.

So ist, wenn die zwey Größen a und b mit einander verglichen werden, der Ausdruk a — b oder b — a der Exponent ihres arithmetischen Verhältnisses, je nachdem a größer oder kleiner als b ist.

Bey einem arithmetischen Verhältnis heißt dasjenige Glied, welches man zuerst schreibt oder als den Minuendus ansieht, das Vorderglied des Verhältnisses: das andere, welches man als den Subtrahendus behandelt, das Hinterglied.

Man nennt zwey arithmetische Verhältnisse gleich, wenn ihre Exponenten gleich sind. So zum Beyspiel,

wenn man die zwey Größen a und b hat, deren Unterschied a — b, und die zwey andern c und d, deren Unterschied c — d ist, und wenn a — b = c — d; so sagt man, die arithmetischen Verhältnisse von a zu b und von c zu d seyen gleich, und die 4 Größen a, b, c, d bilden eine arithmetische Proportion. Eine arithmetische Proportion ist demnach die Gleichheit zweyer arithmetischen Verhältnisse.

§. 112.

Lehrsaz. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden äussersten Glieder gleich der Summe der beyden mittlern.

Symbolisch. Wenn a — b = c — d; so ist a + d = b + c.

Bew. Nach der Voraussezung ist a — b = c — d; man seze zu jedem Glied die Summe b + d hinzu:
so erhält man a + d = b + c. W. z. e. w.

Umgekehrt. Wenn die Summe zweyer Größen der Summe zweyer andern gleich ist; so kann man die zwey ersten als die beyden äussersten, und die zwey lezten als die beyden mittlern Glieder einer arithmetischen Proportion ansehen.

Symbolisch. Wenn a + d = b + c; so ist a — b = c — d.

Bew. Nach der Voraussezung ist a + d = b + c; man nehme von jedem Glied die Summe b + d hinweg;
so erhält man a — b = c — d. W. z. e. w.

Zusaz. Wenn vier Größen eine arithmetische Proportion bilden; so kann man von den beyden äussersten sowohl als von den beyden mittlern Gliedern eines an die Stelle des andern sezen; man kann auch die beyden mittlern Glieder an die Stelle der beyden äussersten, und somit die beyden äussersten an die Stelle der beyden mittlern sezen; und es hat noch immer eine Proportion Statt. Bey allen diesen Veränderungen nämlich bleiben die gleich seyn

sollenden Summen der äussersten und der mittlern immer dieselben.

Wenn die drey ersten Glieder einer arithmetischen Proportion gegeben sind, so findet man das vierte, indem man das erste von der Summe der beyden mittlern abzieht. Wenn nämlich $a \dot{-} b = c - d$,
so ist $a + d = b + c$, und wenn man von jedem Glied a hinwegnimmt, $d = b + c - a$.

In dem besondern Fall, wo die beyden mittlern Glieder gleich sind, heißt die **Proportion** eine stetige. Die Summe der beyden äussersten Glieder ist das doppelte des mittlern, oder das mittlere Glied ist die halbe Summe der beyden äussersten. Wenn mithin s die halbe Summe zweyer Größen, und d den Unterschied jeder dieser Größen und der genannten halben Summe bezeichnet, so bilden die drey Größen $s + d$, s, $s - d$ eine stetige arithmetische Proportion.

§. 113.

Eine arithmetische Progression ist eine Reyhe von Gliedern, deren jede zwey zunächst auf einander folgende um gleichviel unterschieden sind.

Beyspiele. Die Reyhe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.... ist eine arithmetische Progression, bey welcher der Unterschied jeder zwey auf einander folgenden Glieder die Einheit ist.

Die Reyhe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.... ist ebenfalls eine arithmetische Progression, bey welcher der Unterschied jeder zwey auf einander folgenden Glieder 2 ist.

In der ersten Reyhe wird jedes Glied durch die Zahl ausgedrükt, welche seine Stelle, vom ersten an (inclusive) gerechnet, anzeigt. So sind die 10te, 20te, 30te.... der natürlichen Zahlen beziehungsweise 10, 20, 30....; und allgemein ist die nte natürliche Zahl n.

In der zweyten Reyhe, deren jedes Glied das vorhergehende um zwey Einheiten übertrift, besteht jegliches Glied aus der Einheit, und dem beständigen Unterschied 2 so vielmal genommen, wie viele Glieder auf das erste folgen, oder einmal weniger genommen, als man vom ersten an inclusive Glieder hat.

Stellen der Glieder

1te, 2te, 3te, 4te, 5te, 6te, 7te....nte

Glieder

1, 1+2.1, 1+2.2, 1+2.3, 1+2.4, 1+2.5, 1+2.6,.. 1+2(n-1)

oder

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, .. 2n—1

Bey der ersten Progression heißt n das allgemeine Glied der Progression, bey der zweyten ist dieses allgemeine Glied 2n — 1. Wenn man nämlich in diesem Ausdruk statt n nach einander die verschiedenen Werthe 1, 2, 3, 4... substituirt, so erhält man diejenigen Glieder der Reyhe, deren Stellen durch diese Zahlen angezeigt werden.

Allgemein: Es sey a das erste Glied einer arithmetischen Progression, und d die gemeinschaftliche Differenz der Glieder. Diese Progression ist

$a, a \pm d, a \pm 2d, a \pm 3d, a \pm 4d, a \pm 5d, \ldots a \pm d(n-1)$,

je nachdem die Progression wächst oder abnimmt. Man erhält nämlich das nte Glied dieser Progression, wenn man die gemeinschaftliche Differenz zweyer auf einander folgenden Glieder einmal weniger genommen, als Glieder sind, zu dem ersten Glied addirt oder von demselben abzieht, (je nachdem die Progression wächst oder abnimmt). Der Ausdruk $a \pm d\,(n-1)$ ist der allgemeine Ausdruk der Progression; man erhält nämlich durch Substitution verschiedener ganzer Zahlen statt n in demselben die Ausdrücke der Glieder, deren Stellen durch jene Zahlen angezeigt werden.

§. 114.

Es seyen die zehen ersten natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Man nehme von diesen Zahlen

je zwey und zwey, nämlich die erste und lezte, und je zwey von den äussersten gleich weit abstehende Glieder; man nehme sodenn die Summen der Glieder eines jeden dieser Paare. Diese Summen sind einander gleich, nämlich alle gleich der Zahl 11; wie folgendes Schema zeigt:

	1	2	3	4	5
	10′	9′	8′	7′	6
Summen	11	11	11	11	11

Man hat mithin, um die Summe der zehen ersten natürlichen Zahlen anders als durch successive Addition dieser zehen Glieder zu erhalten, nur die Summe des ersten und zehenten Glieds, nämlich 11, zu nehmen, und diese so vielmal zu wiederholen, als man Paare hat, das heißt, fünfmal. Diese Summe ist mithin $11 \times 5 = 55$.

Hätte man statt 10 Gliedern, aus denen 5 Paare werden, eine ungerade Anzahl von Gliedern, zum Beyspiel 11; so würde dem mittlern Glied der Reyhe, 6, keines correspondiren, mit dem es ein Paar bilden könnte. Die Summe der Glieder jedes Paars wäre 12 oder das doppelte von 6, und die Summe der Progression wäre 12 wiederholt 5 und ein halbmal; und man kann sagen, daß die Anzahl der Paare in der That $5\frac{1}{2}$ sey; wie folgendes Schema zeigt:

	1	2	3	4	5	6
	11	10	9	8	7	
Summen	12	12	12	12	12	6

Allgemein. Sey 1, 2, 3, 4, 5, 6....n die Reyhe der n ersten natürlichen Zahlen.

Erster Fall. Es sey n eine gerade Zahl 2m; so läßt sich die Reyhe in m Paare von Gliedern zerlegen, deren eines vom ersten, das andere vom lezten gleich weit abstehen, und deren Summe constant, nämlich 2m+1 oder n+1 ist; mithin ist die Summe aller Glieder = (n+1)m oder $\frac{n(n+1)}{2}$.

Schema:

	1	2	3	4	...	m-1	m
	$\frac{2m\,'}{}$	$\frac{2m-1'}{}$	$\frac{2m-2'}{}$	$\frac{2m+3}{}$	...	$\frac{m+2'}{}$	$\frac{m+1}{}$
Summen	$2m+1$,	$2m+1$,	$2m+1$,	$2m+1$	...	$2m+1$,	$2m+1$

Anzahl der Paare m

Werth jedes Paars $2m+1$

Werth der Progression $m(2m+1)=\frac{n(n+1)}{1.2}$

Zweyter Fall. Es sey n eine ungerade Zahl $2m+1$. Diese Reyhe läßt sich auch in m Paare gleichweit vom ersten und vom lezten abstehende Glieder, deren Summe constant, nämlich $2m+2$ ist, und in das mittlere Glied $m+1$ zerlegen, welches das arithmetische Mittel zwischen den Gliedern eines Paares ist. Die Summe dieser Progression ist mithin $(2m+2)m+(m+1)=(m+1)2m+(m+1)=$
$(m+1)(2m+1)=(m+1)n=\frac{2m+2}{2}.n=\frac{n(n+1)}{1.2}$.

Schema:

	1	2	3	4	5	....	m-1	m	,m+1
	$\frac{2m+1'}{}$	$\frac{2m}{}$	$'\frac{2m-1}{}$	$'\frac{2m-2}{}$	$'\frac{2m-3}{}$	....	$\frac{m+3'}{}$	$\frac{m+2}{}$	$\frac{}{}$
Summen	$2m+2$,	$2m+2$,	$2m+2$,	$2m+2$,	$2m+2$	....	$2m+2$,	$2m+2$,	$m+1$

Anzahl der Paare m

Werth jedes Paars $2m+2$

Summe der Paare $m(2m+2)=2m(m+1)$

Summe der Progression $2m(m+1)+m+1=(m+1)(2m+1)$
$=\frac{2m+2}{2}(2m+1)=\frac{(n+1).n}{1.2}$.

Die Summe der n ersten natürlichen Zahlen ist mithin $\frac{n(n+1)}{1.2}$, für jeden geraden oder ungeraden Werth von n. Und da immer von zweyen auf einander folgenden Zahlen die eine gerade ist, so ist das Produkt $n(n+1)$ immer gerade oder durch 2 theilbar, und folglich der Ausdruk $\frac{n(n+1)}{1.2}$ eine ganze Zahl.

Es sey bewiesen, daß die Summe der n ersten natürlichen Zahlen $\frac{n(n+1)}{1.2}$ sey; so wird die Summe der n+1 ersten natürlichen Zahlen $\frac{n(n+1)}{1.2}+n+1=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$ $=(n+1).\frac{n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$ seyn; welche Formel mit der vorhergehenden einerley ist, wenn in dieser n+1 statt n gesezt wird. Nun ist aber die Formel $\frac{n(n+1)}{1.2}$, wie man sich durch unmittelbare Ansicht überzeugt, für kleine Werthe von n, wie 1, 2, 3, 4, 5... wahr; folglich ist sie auch für jeden folgenden Werth von n, und mithin für alle Werthe von n wahr.

Anmerkung. Der Ausdruk $\frac{n(n+1)}{1.2}$ der Summe der natürlichen Zahlen wird eine **Triangularzahl** genannt, weil sie die Anzahl von Punkten anzeigt, die in Triangelform so gereyht sind, daß drey benachbarte Punkte, von welchen zwey zu einer Reyhe und der dritte zu der dem Abstand der beyden ersten gegen über liegenden Reyhe gehören, die Spizen eines gleichseitigen Triangels ausmachen.

Wenn nämlich n die Anzahl der auf einer Seite eines gleichseitigen Triangels gereyhten Punkte ist, so ist $\frac{n(n+1)}{1.2}$ die Anzahl aller zusammengereyhten Punkte.

Die Reyhe der Triangularzahlen ist mithin 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36... $\frac{n(n+1)}{1.2}$.

§. 115.

Es sey die Reyhe der ungeraden Zahlen: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13...2n-1. Wenn n eine gerade Zahl ist, so läßt sich diese Reyhe in eine Anzahl $\frac{n}{2}$ gleicher Paare zerlegen, deren jedes aus zwey gleich weit vom ersten und vom lezten abstehenden Gliedern besteht; die Summe der

ganzen Progression ist mithin der Werth eines dieser Paare so vielmal wiederholt, als man Paare hat, nämlich $2n \times \frac{n}{2} = nn$.

Ist n eine ungerade Zahl $2m+1$; so läßt sich die Progression in m gleiche Paare gleichweit vom ersten und vom lezten Glied abstehender Glieder, und in das $m+1$te Glied zerlegen, welches $2m+1$ oder n ist. Das lezte Glied ist $2n-1$, die Summe des ersten und lezten $2n$, und die Summe der Progression $2n \cdot m+n = n(2m+1) = nn$.

So ist also in beyden Fällen, n mag gerade oder ungerade seyn, die Summe der n ersten ungeraden Zahlen der nten Quadratzahl gleich.

Man habe nämlich bewiesen, daß die Summe der n ersten ungeraden Zahlen die nte Quadratzahl, das ist, nn sey. Die folgende ungerade Zahl ist $2n+1$; mithin die Summe der $n+1$ ersten ungeraden Zahlen $nn+2n+1$ oder $(n+1)^2$. Folglich wenn der Saz für einige Werthe von n richtig ist, so ist er für alle folgenbe richtig. Nun ist aber der Saz, wie sich durch die Ansicht ergibt, richtig für kleine Werthe von n, wie 1, 2, 3, 4, 5...; folglich ist er für alle Werthe von n nach einander richtig.

Dieser Saz stimmt mit demjenigen überein, was über die Anordnung der Punkte zu Quadraten §. 25. entwikelt worden ist, wo man gesehen hat, daß eine jede Anordnung aus der vorhergehenden durch Hinzufügung der nächstfolgenden ungeraden Zahl entstehe *).

*) Die beyden Reyhen der TriangularZahlen und der Quadratzahlen kommen häufig nicht nur in der reinen, sondern auch in der gemischten Mathematik vor. Besonders verdient bemerkt zu werden, daß eine Triangularzahl sich um so viel mehr der Hälfte der correspondirenden Quadratzahl nähert, je grösser diese Zahlen sind. Der Ausdruk $\frac{n(n+1)}{1.2}$ nähert sich nämlich um so mehr dem Werth $\frac{1}{2}$ nn, je grösser n in Vergleich mit der Einheit ist.

§. 116.

Kennt man die Summe der natürlichen Zahlen, so kann man jede arithmetische Progression summiren.

Es sey nämlich a das erste Glied einer arithmetischen Progression,
d die gemeinschaftliche Differenz der Glieder,
n die Anzahl der Glieder,
s die Summe der n Glieder: so daß

$$s = a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)+\ldots+(a+(n-1)d)$$

Diese Summe besteht einmal aus dem ersten Glied a sovielmal genommen als man Glieder hat, nämlich nmal, zweytens aus der Differenz d multiplicirt mit der Summe der n-1 ersten natürlichen Zahlen, welche ist $\frac{(n-1)n}{1.2}$. Folglich erhält man

$$s = na + d \times \frac{n(n-1)}{1.2}.$$

Beyspiele. Es sey $a=1$, $d=1$, und mithin die zu summirende Progression die Reyhe der natürlichen Zahlen. So hat man $s = n + \frac{n(n-1)}{1.2} = n\left(1+\frac{n-1}{2}\right) = n.\frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{1.2}$; welches mit §. 114. übereinstimmt.

Es sey $a=1$, $d=2$; so ist $s = n+n(n-1) = nn$. Die zu summirende Progression ist die der ungeraden Zahlen, deren Summe Quadratzahlen gibt.

Herr Le Sage hat von den Triangularzahlen eine interessante Anwendung auf den Ackerbau gemacht. Man kann bey unverändertem Abstand der nächsten Bäume, Weinstöcke oder anderer Pflanzen, und mithin ohne der Vegetation zu schaden, eine größere Anzahl in ein gegebenes Stük Landes sezen, wenn man sie triangular als wenn man sie in Quadratform reyht, im Verhältnis der Seite eines gleichseitigen Triangels zu seiner Höhe: denn in diesem Verhältnis sind die Reyhen einander näher bey der TriangularAnordnung als bey der quadratförmigen. Dieses Verhältnis ist genau das von 2 zu $\sqrt{3}$, und ungefehr das von 15 zu 13.

Es sey $a=1$, $d=3$. So ist $s=n+3.\frac{n(n-1)}{1.2}=$ $n\left(1+3\frac{n-1}{2}\right)=n\times\frac{3n-1}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$. Wenn $a=1$, $d=4$; so ist $s=n+4\frac{n(n-1)}{1.2}=n(1+2n-2)=n(2n-1)$.

Man nennt die Summen der Glieder einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied die Einheit, und deren gemeinschaftliche Differenz der Glieder eine ganze positive Zahl ist, Polygonalzahlen: diese Zahlen heissen nämlich Triangular=, Quadrat=, Pentagonal=, Hexagonal=, Heptagonalzahlen...., je nachdem die gemeinschaftliche Differenz der zu summirenden Progression

1, 2, 3, 4, 5... ist

Den Grund der beyden ersten Benennungen haben wir schon gesehen. Die übrigen Polygonalzahlen entsprechen ihren Benennungen nicht so vollkommen, sondern nur unvollkommen auf folgende Art:

Es seyen von einer der Spizen eines Vielegs die Diagonalen gezogen, welche sich ziehen lassen; diese Diagonalen und die an dieser Spize liegenden Seiten seyen verlängert, und von denselben nach einander das doppelte, dreyfache, vier=, fünf=,... mfache genommen, die Endpunkte dieser Verlängerungen der Seiten und der ihnen zunächst liegenden Diagonalen alsdenn durch gerade Linien verbunden; so entstehen hiedurch Vieleke, die dem ersten ähnlich, und deren correspondirende Dimensionen die doppelte, drey, vier, fünf, ... mfache von denen des ersten sind. Nun seyen auf diesen Seiten und Diagonalen von der Spize an gerechnet Punkte gestellt, deren Abstände von den zunächstliegenden Punkten den Seiten und Diagonalen des ersten Vielegs beziehungsweise gleich seyen. Die Anzahl der so gereyhten Punkte wird die correspondirende Polygonalzahl seyn. Da diese Verallgemeinerung (auf welche uns die nüzlichen Beyspiele des Triangels und des Quadrats geleitet haben) wenig Nuzen gewährt, so begnüge ich mich damit, dieselbe hier angeführt zu haben.

§. 117.

Vermittelst der Gleichung $s = an + d \times \frac{n(n-1)}{1.2}$, kann man, wenn von den vier Größen a, d, n, s irgend drey gegeben sind, die vierte derselben bestimmen.

Namentlich wenn a, d, s bekannt sind, bestimmt man n durch die Gleichung $dn^2 + n(2a - d) = 2s$.

1° sey $d = 0$; so ist $n = \frac{s}{a}$.

2° sey $d > 0$; so ist $n = \frac{\pm\sqrt{((2a-d)^2 + 8ds)} - (2a-d)}{2d}$.

Der erste Werth von n ist der einzige, welcher die Frage im eigentlichen Sinne ihrer Aussage beantworten kann: und damit dieser Werth Gerüge leisten könne, muß $(2a-d)^2 + 8ds$ einem Quadrat gleich, und $\sqrt{((2a-d)^2+8ds)}-(2a-d)$ durch 2d theilbar seyn.

Wenn d Null ist; so verschwinden die beyden Theile des Bruchs, der den Werth von n ausdrükt, zu gleicher Zeit. Um den diesem Fall entsprechenden Werth von n aus der Formel zu finden, multiplicire man die beyden Theile des Bruchs mit $\sqrt{((2a-d)^2+8ds)} + (2a-d)$; so erhält man $n = \frac{8ds}{2d(\sqrt{((2a-d)} + 8ds) + (2a-d))} = \frac{4s}{\sqrt{((2a-d)^2 + 8ds)} + 2a-d)}$ für alle Fälle. Für den Fall $d = 0$ mithin, $n = \frac{4s}{4a} = \frac{s}{a}$.

3° sey d negativ. Aus der Gleichung $dnn - n(2a+d) + 2s = 0$ erhält man $n = \frac{2a+d \pm \sqrt{((2a+d)^2 - 8ds)}}{2d}$. Damit diese Werthe von n reell seyen, muß $(2a+d)^2 \geqq 8ds$ seyn. Ich behaupte, daß dis bey einer abnehmenden arithmetischen Progression Statt habe.

Nämlich $4ddnn - 4dn(2a+d) + (2a+d)^2$ $(= (2dn - (2a+d))^2) \geqq 0$; folglich

$$(2a+d)^2 = 8adn - 4ddn(n-1)$$
$$= 8d\left(an - d\frac{n(n-1)}{1.2}\right), \text{ und da } an - d\times\frac{n(n-1)}{1.2} = s,$$
$$(2a+d)^2 = 8ds.$$

Beyspiele. 1°. Wie viel natürliche Zahlen von der Einheit an muß man haben, um eine gegebene Summe s hervorzubringen?

Hier ist $a=1$, $d=1$. Man hat also $n=\frac{\sqrt{(8s+1)}-1}{2}$

Damit die Auflösung im eigentlichen Sinn der Aufgabe anwendbar sey; muß $8s+1$ einem Quadrat gleich seyn. Ich behaupte, daß 8mal eine Triangularzahl um eine Einheit vermehrt immer ein Quadrat gebe.

Es ist nämlich $8\times\frac{n(n+1)}{1.2} = 4nn+4n$

folglich $8\times\frac{n(n+1)}{1.2}+1 = 4nn+4n+1 = (2n+1)^2$.

2°. Die Progression sey abnehmend, und $a=21$, $d=2$, $s=112$. So erhält man $n=\frac{44\mp 12}{4} = 11\mp 3 = \begin{matrix}8\\14\end{matrix}\}$

Progressionen:

21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7

21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, -5

Im zweyten Fall ist 112 der Ueberschuß der Summe der 10 ersten Glieder über die Summe der 3 leztern (indem man ihr Zeichen verändert).

3°. Die Progression sey abnehmend, und $a=24$, $d=31$, $s=99$. So erhält man $n=\frac{51\mp 15}{6} = \begin{matrix}6\\11\end{matrix}\}$

Progressionen: 24, 21, 18, 15, 12, 9

24, 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0, -3, -6.

Ich komme nun auf einige besondere Fragen, welche sich auf arithmetische Progressioneu beziehen.

§. 118.

Aufgabe. Zwey Personen kommen einander entgegen. Die erste macht jeden Tag 10 Meilen, die zweyte macht am ersten Tage 5, am zweyten 6 Meilen, und so jeden folgenden Tag eine Meile mehr als am vorhergehenden. Da sie einander begegnen, so haben sie gleiche Wege gemacht. Man fragt nach der Anzahl der Tage, welche sie brauchen, bis sie zusammentreffen, und nach den Wegen, welche sie zurüklegen.

Ben. Tage . . . . . n

Weg der ersten Person . . . 10n

Weg der zweyten . . . $5n+\frac{n(n-1)}{1.}$

Bed. $5n+\frac{n(n-1)}{1.2}=10n$

Red. $\frac{n(n-1)}{1.2}=5n$

$\frac{n-1}{2}=5$, $n-1=10$, $n=11$.

Aufl. $n=11$; $10n=110$; $5n=55$; $\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{11.10}{1.2}=55$

$$5n+\frac{n(n-1)}{1.2}=110.$$

Anmerkung. Daß die beyden Glieder der Gleichung $5n+\frac{n(n-1)}{1.2}=10n$ sich durch n theilen lassen, zeigt an, daß einer der Werthe von n Null ist. Die beyden Personen können nämlich auch gar keinen Weg gemacht haben.

Allgemein: Die Anzahl der Glieder einer arithmetischen Progression finden, deren erstes Glied und die gemeinschaftliche Differenz der Glieder bekannt sind; so daß die Summe dieser Progression dem Product der Anzahl ihrer Glieder durch eine gegebene Zahl gleich sey.

Es sey a das erste Glied, d die gemeinschaftliche Differenz, b die gegebene Zahl, n die gesuchte Anzahl der Glieder. So hat man die Gleichung

$$an+\frac{n(n-1)}{1.2}d=bn;\ \text{oder}\ a+\frac{n-1}{2}d=b;\ n=\frac{2(b-a)}{d}+d.$$

Es sey $d=0$; so ist $n=2\times\frac{b-a}{0}$, mithin n unmöglich, wenn nicht $b=a$, und in diesem Fall kann n jeden beliebigen Werth haben. In der That kann die Gleichung $an=bn$ nicht Statt haben, wenn nicht $a=b$ gegeben ist; und dann kann n jeden beliebigen Werth haben.

§. 119.

Zwey um einen Abstand von 164 Meilen von einander entfernte Personen kommen einander entgegen. Die erste macht jeden Tag 10 Meilen, die zweyte am ersten Tag 7, und an jedem folgenden eine Meile mehr als am vorhergehenden. Wann werden die beyden Personen einander begegnen?

Ben. Anzahl der zugebrachten Tage . . . n

Weg der ersten Person 10n

. . . zweyten . . . . . $7n+\frac{n(n-1)}{1.2}$

Bed. $10n+7n+\frac{n(n-1)}{1.2}=164.$

Red. $17n+\frac{nn-n}{2}=164$

$nn+33n=328$

$4nn+4.33n+1089=4.328+1089=2401$

$2n+33=\pm 49$

$2n = 16\}$
$\quad -82\}$

$n = 8\}$
$\quad -41\}$

Die erste Auflösung ist die einzige, welche die Aufgabe in ihrem eigentlichen Sinne beantwortet.

Aufl. $n=8$; $10n=80$; $7n=56$; $\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{8.7}{1.2}=28$;

$7n+\frac{n(n-1)}{1.2}=84.$

Probe. $80+84=164.$

Andere Beyspiele. Eine Person erspart jährlich 100 Thaler, und legt dieselbe auf Interessen zu 5 Procent aus. Nach Verfluß von wieviel Jahren wird sie 1225 Thaler besizen?

Man sezt voraus, daß die Ersparung zu Ende des ersten Jahrs anfange, und daß das ersparte Interesse keine weitere Interessen trage, oder daß das Interesse einfach sey.

Desgleichen sey

jährliches Ersparnis	Interesse	Summe der Ersparnisse
300	6 Procent	2904
400	7 . . .	6648

Allgemein. Jährliches Ersparnis a
Interesse . r
Summe der Ersparnisse s

Ben. Gesuchte Anzahl von Jahren . . . n.

Die am Ende des ersten Jahrs ersparte Summe bringt n—1 Jahre lang Interessen, und da das jährliche Interesse ra ist, so erhält man

Interesse der ersten Ersparnis nach Verfluß von n Jahren ra(n—1)

ebenso Interesse d. zweyten Ersparnis nach Verfluß v. n Jahren ra(n—2)

. . . dritten . . . . . ra(n—3)
. . . vierten . . . . . ra(n—4)
. . . = ... =
. . . = ... =
. . . (n—2)ten 2ra
. . . (n—1)ten . . . . ra

Folglich ist das von den Interessen allein herkommende Vermögen $ra(1+2+3+4+\ldots+(n-1)) = ra \times \frac{n(n-1)}{1.2}$

Totaler Vermögenszustand $= na + ra \times \frac{n(n-1)}{1.2}$

Ebendis ist der Ausdruk der Summe einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied a, die gemeinschaftliche Differenz der Glieder ra, und die Anzahl der Glieder n ist.

§. 120.

Aufgabe. Ich bin jemanden die Summe s schuldig. Da ich sie aber gegenwärtig nicht bezahlen kann, so kommen wir mit einander überein, daß ich die Schuld durch eilf gleiche Zahlungen zu Anfang jedes Jahrs von jezt an abtrage. Wie hoch muß sich jede dieser Zahlungen belaufen, wenn das Interesse zu 5 Procent gerechnet, und nur auf das einfache Interesse Rükſicht genommen wird? Die Summe s wäre nach Verfluß von 10 Jahren geworden $s + 10 \times \frac{1}{20} s = \frac{3}{2} s$.

Ben. Es sey x die jährliche Zahlung; mithin alle Zahlungen zusammen 11x.

Die zu Anfang des ersten Jahrs geschehene Zahlung wäre 10 Jahre lang auf Interesse gestanden; sie hätte mithin Interesse getragen $10 \times \frac{1}{20} x$. Man erhält daher

Ertrag des Interesses der ersten Zahlung $10 \times \frac{1}{20} x$

" " " " zweyten " " $9 \times \frac{1}{20} x$

" " " " dritten " " $8 \times \frac{1}{20} x$

" " " " " " "

" " " " " " "

" " " " neunten " " $2 \times \frac{1}{20} x$

" " " " zehenten " " $1 \times \frac{1}{20} x$

Interesse der Zahlungen $\frac{1}{20} x (1+2+3+4+\ldots 10) = 55 \times \frac{1}{20} x$

Bed. $11x + 55 \times \frac{1}{20} x = \frac{3}{2} s$

Red. $11x + \frac{11}{4} x = \frac{3}{2} s$

$55x = 6s.$

Aufl. $x = \frac{6}{55}s$. Jede jährliche Zahlung muß $\frac{6}{55}$ der Schuld betragen.

$$11x = \frac{6}{5}s$$

$$\frac{55}{2\,0}x = \frac{3}{1\,0}s$$

$$11x + \frac{55}{2\,0}x = \frac{1\,5}{1\,0}s = \frac{3}{2}s.$$

Beyspiele. Es sey $s = 5500$; so erhält man $x = 600$,
$s = 4400$; . . . . $x = 480$;
das Interesse sey zu 6 Procent, und die Anzahl der Jahre 8.

Allgemein. Es sey s ein von gegenwärtigem Augenblik an zinsentragendes Kapital,
a eine jährlich zu bezahlende Summe
n eine Anzahl von Jahren,
r der Zinsfuß;

Damit der Werth aller in n Jahren nach einander geschehener Zahlungen dem Werth der Summe s nach Verfluß dieser Jahre gleich sey, indem das einfache Interesse r ist; so muß man die Gleichung haben:

$$na + ra \times \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = s + nrs.$$

Wenn in dieser Gleichung von den vier Größen a, s, r, n irgend drey gegeben sind, so läßt sich die vierte daraus bestimmen.

Wenn das Kapital s eine nicht jezt gleich, sondern erst nach Verfluß von n Jahren ohne Interesse abzutragende Schuld ist, so hat man die Gleichung $na + ra \times \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = s$: in welcher man ebenfalls aus drey gegebenen Größen von den vieren a, s, r, n die vierte bestimmen kann.

§. 121.

Aufgabe. Eine Person, die ein gewisses Kapital s besizt, welches sie nur zu 4 Procent anbringen kann, tritt dasselbe als nicht zurükbezahlbar an eine andere Person ab, welche ihr zehen Procent davon bezahlt. Sie erspart alsdenn die hieraus erwachsende Rente, und bringt sie nun 4

Procent an. Nach Verfluß von wieviel Jahren wird diese Person das nämliche Kapital besizen, welches sie durch Anbringen der Summe s zu 4 Procent erworben hätte, indem man immer einfaches Interesse rechnet?

Ben. Es sey die gesuchte Anzahl von Jahren n,

das Kapital zu 4 Procent wäre geworden $s+n\times\frac{1}{25}s$

die jährliche Rente wird seyn $\frac{1}{10}s$

die in n Jahren bezogene Rente wird seyn $n\times\frac{1}{10}s$

die zu Ende des ersten Jahrs bezogene Rente hätte $n-1$ Jahre hindurch Zinsen getragen; man hat mithin

Interesse der am Ende des ersten Jahrs bezogenen Rente $(n-1)\frac{1}{250}s$

. . . . . zweyten . . . $(n-2)\frac{1}{250}s$

. . . . . dritten . . . $(n-3)\frac{1}{250}s$

. . . . . = . . . =

. . . . . = . . . =

. . . . . (n—2)ten . . . $2\times\frac{1}{250}s$

. . . . . (n—1)ten . . . $1\times\frac{1}{250}s$

Interesse aller Renten $\frac{1}{250}s(1+2+3+\ldots\ldots+(n-1))$

$$=\frac{1}{250}s\times\frac{n(n-1)}{1.2}$$

Bed. $s+n\times\frac{1}{25}s=n\times\frac{1}{10}s+\frac{n(n-1)}{1.2}\times\frac{1}{250}s.$

Red. Diese Gleichung reducirt sich auf folgende:

$$nn+29n=500$$

$$n=\frac{\sqrt{2841}-29}{2}=\text{nahe }\frac{53{,}3-29}{2}=12,15\text{ ungefehr.}$$

Die gesuchte Anzahl von Jahren ist nämlich näher bey 12 als bey 13.

Nach Verfluß von zwölf Jahren wäre das erste Kapital $1+12\times\frac{1}{25}=1{,}48$ vom Kapital. Die Rente wäre $12\times\frac{1}{10}+\frac{12.11}{2}\times\frac{1}{250}=1{,}464$ vom Kapital. Folglich ist nach Verfluß von 12 Jahren der Werth der Rente geringer als der Werth des Kapitals.

Nach Verfluß von dreyzehn Jahren wäre das Kapital $1+\frac{13}{25}=1{,}52$ vom Kapital. Die Rente wäre $13\times\frac{1}{10}+\frac{13.12}{1.2}\times\frac{1}{250}=1{,}612$ vom Kapital. Mithin wäre nach Verfluß von dreyzehen Jahren der Werth der Rente höher als der Werth des Kapitals.

Andere Beyspiele. Das Interesse sey 5, 6, 7.... Procent, indem die jährliche Rente $\frac{1}{10}$ des Kapitals ist.

Allgemein. Die Rente sey $\frac{1}{m}$ des Kapitals, und das Interesse sey r. Werth des Kapitals nach Verfluß von n Jahren $s+n\times rs$.

Werth der Rente $n\times\frac{1}{m}s+\frac{1}{m}\times rs(1+2+3+....n-1)$

$$=n\times\frac{1}{m}s+\frac{1}{m}\times rs\times\frac{n(n-1)}{1.2}$$

Bed. $s+n\times rs=n\times\frac{1}{m}s+\frac{1}{m}rs\times\frac{n(n-1)}{1.2}$

$$1+nr=\frac{n}{m}+\frac{r}{m}\times\frac{n(n-1)}{1.2}.$$

Vermittelst dieser Gleichung bestimmt man eine von den Größen n, r, n durch die beyden andern.

Analoge Aufgabe. Eine Person besizt ein Kapital von 100000 Gulden, welches sie nur zu 4 Procent anbringt, und welches ihr mithin 4000 Gulden Rente trägt. Sie verzehrt aber jährlich 10000 Gulden; und entlehnt daher zu Anfang jedes Jahrs 6000 Gulden, wovon sie 10 Procent zahlt. Sie bezahlt weder Kapital noch Zinsen, bis sie gänzlich ruinirt ist. Wann wird dis geschehen?

§. 122.

Aufgabe. Ein Vater macht sein Testament auf folgende Weise. Er vermacht dem ältesten seiner Kinder die Summe a und $\frac{1}{7}$ des Ueberrests seines Vermögens; dem zweyten die Summe 2a, und $\frac{1}{7}$ des Ueberrests seines Vermögens; dem dritten 3a und $\frac{1}{7}$ des Ueberrests seines Vermögens; und so fort, indem er die erste Portion jedes der folgenden Kinder um ein a vermehrt. Nun findet sich, daß die Erbschaft auf diese Art gleich unter die Kinder ver-

theilt ist. Man fragt nach der Anzahl der Kinder, nach ihrem Antheil und dem Werth der Erbschaft.

Durch Räsonnement. Wenn das jüngste noch eine zweyte Portion hätte, so wäre die Erbschaft nicht ausgetheilt; mithin hat das jüngste keine zweyte Portion; und sein Antheil oder seine erste Portion ist die Summe a soviel-mal genommen, als Kinder sind.

Die erste Portion des ohneins lezten ist um 1a weniger: aber die zwey lezten Kinder sollen gleichen Antheil bekommen; mithin ist die zweyte Portion des ohneins lezten a.

Aber diese zweyte Portion ist $\frac{1}{7}$ von demjenigen, was von der Erbschaft übrig ist, ehe das ohneins lezte seine zweyte Portion erhält: und der Antheil des lezten Kinds ist $\frac{6}{7}$ hievon; mithin ist die erste Portion des lezten Kinds sechsmal die zweyte Portion des ohneins lezten; folglich ist der Antheil des lezten Kinds 6a.

Aber der Antheil des lezten Kinds ist a sovielmal genommen, als Kinder sind. Folglich ist die Anzahl der Kinder 6y, die Portion des lezten 6a, und der Werth der Erbschaft 36a.

Erbschaft	36a
Nach dem ersten Wegnehmen des ersten . . .	35a
zweyte Portion des ersten	5a
Rest	30a

Antheil des ersten 1a + 5a = 6a

Nach dem ersten Wegnehmen des zweyten . . .	28a
zweyte Portion des zweyten	4a
Rest	24a

Antheil des zweyten 2a + 4a = 6a

Nach dem ersten Wegnehmen des dritten . . .	21a
zweyte Portion des dritten	3a
Rest	18a

Antheil des dritten 3a + 3a = 6a

Nach dem ersten Wegnehmen des vierten . .	14a
zweyte Portion des vierten	2a
Rest	12a

Antheil des vierten 4a + 2a = 6a

Nach dem ersten Wegnehmen des fünften . . . 7a
zweyte Portion des fünften 1a
Rest 6a
Antheil des fünften 5a + 1a = 6a
Nach dem ersten Wegnehmen des sechsten . . . 0
zweyte Portion des sechsten 0
Rest 0
Antheil des sechsten 6a.

Algebraisch. Ben. Erbschaft x
Nach dem ersten Wegnehmen des ältesten . . . x—a
zweyte Portion des ältesten . . . . . $\frac{1}{7}x - \frac{1}{7}a$
Antheil des ältesten . . . $a + \frac{1}{7}x - \frac{1}{7}a = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}a$
Rest . . . . . $\frac{6}{7}x - \frac{6}{7}a$
Nach dem ersten Wegnehmen des zweyten . . . $\frac{6}{7}x - \frac{20}{7}a$
zweyte Portion des zweyten . . . . . $\frac{6}{49}x - \frac{20}{49}a$
Antheil des zweyten $2a + \frac{6}{49}x - \frac{20}{49}a = \frac{6}{49}x + \frac{78}{49}a$
Rest . . . . . $\frac{36}{49}x - \frac{120}{49}a$

Bed. $\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}a = \frac{6}{49}x + \frac{78}{49}a$.

Red. $7x + 42a = 6x + 78a$ (indem man beyde Glieder mit 49 multiplicirt.)

$1x + 42a = 78a$
$x = 36a$.

Der übrige Theil der Auflösung ist im arithmetischen Verfahren enthalten.

Allgemein. Die zweyte Portion jedes Kinds ist $\frac{1}{n}$, dessen, was von der Erbschaft übrig bleibt, nachdem die vorhergehenden Kinder ihre Portionen genommen haben, und es selbst seine erste Portion genommen hat.

Man findet durch das nämliche Räsonnement und durch das nämliche arithmetische Verfahren, daß die Anzahl der Kinder $n-1$, der Antheil eines jeden $(n-1)a$, und der Werth der Erbschaft $(n-1)^2a$ ist; so daß die ersten Portionen eines jeden Kinds wachsen wie die natürlichen Zahlen.
a, 2a, 3a, 4a, 5a . . . $(n-2)a$, $(n-1)a$
die zweyten Portionen aber abnehmen wie die Zahlen
$(n-2)a$, $(n-3)a$, $(n-4)a$, $(n-5)a$, $(n-6)a$ . . . 1a, 0.

Gesezt es sey m (kleiner als n—1) die Anzahl der Kinder, welche ihren Antheil schon genommen haben; und sie haben mithin miteinander m(n—1)a genommen; so bleibt von der Erbschaft (n—1)(n—m—1)a

$$= (n(n-m-1)-n+m+1)a$$
$$= n(n-m-2)a+(m+1)a.$$

Die erste Portion des folgenden Kinds, welches das(m+1)te ist, wird (m+1)a seyn; es wird alsdenn von der Erbschaft n(n—m—2)a übrig bleiben: seine zweyte Portion wird (n—m—2)a seyn; im Ganzen wird es (n—m—2)a+(m+1)a=(n—1)a bekommen.

Andere Beyspiele. Die ersten Portionen wachsen wie die ungeraden Zahlen 1a, 3a, 5a, 9a, 11a...; und die zweyten Portionen seyen der nte Theil der Reste.

Durch Räsonnement. Das lezte Kind hat keine zweyte Portion, und seine erste Portion ist das Produkt von a durch die sovielste ungerade Zahl, als die Anzahl der Kinder besagt.

Da die erste Portion des ohneins lezten um 2a kleiner ist als die erste Portion des lezten, und da diese beyden Kinder insbesondere gleichen Antheil bekommen sollen; so ist die zweyte Portion des ohneins lezten 2a. Aber der Antheil des lezten (welcher seine erste Portion ist) ist (n—1) mal die zweyte Portion des ohneins lezten, das ist, (n—1)2a; folglich ist die sovielste ungerade Zahl als die Anzahl der Kinder besagt, 2(n—1); mithin ist 2(n—1) eine ungerade Zahl; welches nicht anders Statt finden kann, als wenn n ein Bruch ist, der auf seine kleinste Benennung gebracht 2 zum Nenner hat, oder von der Form $\frac{2n+1}{2}$: alsdenn ist die sovielste ungerade Zahl, als die Anzahl der Kinder besagt, 2n—1; diese Zahl ist aber die nte ungerade Zahl; folglich, wenn jedes Kind $\frac{2}{2n+1}$ von dem bekommt, was es übrig an der Erbschaft findet, nachdem die älteren ihre Antheile und es selbst seine erste Portion bekommen hat, so findet man für die Anzahl der Kinder n, für den Antheil eines jeden (2n—1)a, und für die Erbschaft n(2n—1)a.

Erbschaft . . . . . n(2n—1)a
Nach dem ersten Hinwegnehmen des ältesten (2n+1)(n—1)a
zweyte Portion des ältesten . . . . 2(n—1)a
Antheil des ältesten . . . a+2(n—1)a=(2n—1)a
Rest . . . . . (2n—1)(n—1)a
Nach dem ersten Hinwegnehmen des zweyten (2n+1)(n—2)a
zweyte Portion des zweyten . . . . . 2(n—2)a
Antheil des zweyten . . . 3a+2(n—2)a=(2n—1)a
Rest . . . . . (2n—1)(n—2)a
Nach dem ersten Hinwegnehmen des dritten (2n+1)(n—3)a
zweyte Portion des dritten . . . . 2(n—3)a
Antheil des dritten . . . 5a+2(n—3)a=(2n—1)a
Rest . . . . . (2n—1)(n—5)a
Nach dem ersten Hinwegnehmen des vierten (2n+1)(n—4)a
zweyte Portion des vierten . . . . 2(n—4)a
Antheil des vierten . . . 7a+2(n—4)a=(2n—1)a
Rest . . . . . (2n—1)(n—4)a

Ebenso würde man zeigen, daß, indem die ersten Portionen der folgenden Kinder wie die Zahlen 9a, 11a, 13a . . . (2n—3 a, (2n—1)a wachsen, ihre zweyte Portionen wie die Zahlen 2(n—5), 2(n—6), 2(n—7) . . . 2. 1a, 0. a abnehmen, und mithin die Antheile eines jeden (2n—1)a sind.

Es sey nämlich m die Anzahl der Kinder, deren jedes (2n—1)a bekommen hat, und es bleibe mithin von der Erbschaft übrig (n—m)(2n—1)a. Die erste Portion des (m+1)ten Kinds wird seyn (2m+1)a und es wird von der Erbschaft übrig bleiben (2n+1)(n-m-1)a die zweyte Portion des (m+1)ten Kinds wird seyn 2(n-m-1)a und es bleibt von der Erbschaft übrig (2n—1)(n—m—1)a
Antheil des (m+1)ten Kinds (2m+1)a+2(n-m-1)a=(2n-1)a

Das algebraische Verfahren kann nach der beym vorhergehenden Beyspiel vorgenommenen Entwiklung keine Schwierigkeit haben.

Andere Beyspiele. Die ersten Portionen der auf einander folgenden Kinder sollen wachsen wie die Glieder der

arithmetischen Progression 1a, 4a, 7a, 10a, 13a .... (3m-2)a: und ihre zweyte Portionen sollen die nten Theile der Reste seyn. Man wird ebenfalls zeigen, daß der Bruch $\frac{1}{n}$ von der Form $\frac{3}{3n+1}$ seyn muß. Die Anzahl der Kinder wird n, die Portion eines jeden derselben (3n—2)a, und die Erbschaft n(3n—2)a seyn.

Allgemein. Die ersten Portionen der auf einander folgenden Kinder sollen der arithmetischen Progression ra, (r+1)a, (2r+1)a, (3r+1)a, (4r+1)a, ... folgen, und ihre zweyten Portionen sollen die $\frac{r}{rn+1}$tel der Reste der Erbschaft seyn, nachdem sie ihre ersten Portionen, und die älteren ihre Antheile bekommen haben. Man findet, daß die Anzahl der Kinder n, der Antheil eines jeden von ihnen (rn—(r—1)a, und die Erbschaft n(rn—(r—1))a ist. Die Probe hievon wird allgemein auf folgende Art gemacht:

Erbschaft. . . . . n(rn-(r-1))a
Rest nach dem ersten Hinwegnehmen des ältesten (rn+1)(n-1)a
zweyte Portion des ältesten . . . . r(n—1)a
Antheil des ältesten (rn—(r—1))a
Rest, nachdem das älteste seinen Antheil bekommen hat
(n-1)(rn-(r-1))a
Rest, nach dem ersten Hinwegnehmen des zweyten (rn+1)(n-2)a
zweyte Portion des zweyten . . . . r(n-2)a
Antheil des zweyten (rn—(r—1))a
Rest, nach dem das zweyte seinen Antheil bekommen hat
(n-2)(rn-(r-1))a
Rest nach dem ersten Hinwegnehmen des dritten (rn+1)(n-3)a
zweyte Portion des dritten . . . . . r(n-3)a
Antheil des dritten (rn—(r—1))a
Rest, nachdem der dritte seinen Antheil bekommen hat,
(n-3)(rn-(r-1))a

Man zeigt ebenso wie in den vorhergehenden Beyspielen: daß, wenn eine Anzahl m von Kindern, jedes seinen Antheil (rn-(r-1))a bekommen, und an der Erbschaft (n-m)(rn-(r-1))a übrig gelassen haben, das folgende oder (m+1)te

Kind auch $(rn-(r-1))a$ bekommen, und an der Erbschaft $(n-(m+1))(rn-(r-1))a$ übrig lassen wird. Die Erbschaft ist mithin vertheilt, wenn $m=n$.

Analoge Aufgabe. Jedes Kind bekommt anfangs $\frac{1}{n}$tel der Erbschaft, und sodenn Portionen, welche einer arithmetischen Progression $1a$, $(r+1)a$, $(2r+1)a$, $(3r+1)a$, $(4r+1)a$... folgen.

§. 123.

Aufgabe. Es seyen die neun ersten natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gegeben. Man verlangt, dieselbe in neun in Quadratform gestellte Fächer so zu sezen, daß die Summen der Zahlen in den drey Fächern jeder der horizontalen, verticalen und diagonalen Reyhen einander gleich seyen.

Durch Räsonnement. Da die Summe der neun gegebenen Zahlen 45, so ist die Summe der in jeder Reyhe befindlichen Zahlen der dritte Theil von 45 oder 15.

Das mittlere Fach gehört zur zweyten horizontalen, zur zweyten verticalen und zu den beyden diagonalen Reyhen. Mithin müssen die Summen der zwey in den äussersten Fächern jeder dieser Reyhen befindlichen Zahlen einander gleich seyn. Man hat demnach, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, in der Reyhe der neun gegebenen Zahlen vier gleiche aus verschiedenen Zahlen bestehende Paare zu finden. Wenn man aber die äussersten derselben und je zwey gleichweit von den äussersten abstehende Glieder unter einander sezt, so findet man wirklich vier gleiche Paare: $\begin{matrix}1\\9\end{matrix}, \begin{matrix}2\\8\end{matrix}, \begin{matrix}3\\7\end{matrix}, \begin{matrix}4\\6\end{matrix}$: folglich müssen die vier ersten und die vier lezten Glieder in die Fächer gesezt werden, welche den Umfang des Quadrats bilden, so daß zwey Glieder eines Paars in den äussersten Fächern einer der vier Reyhen sich befinden; und das mittlere Glied 5 muß in das mittlere Fach gesezt werden. Sezte man in die äussersten Fächer einer diagonalen Reyhe die

beyden äussersten Glieder 1 und 9; so müßte, da das Fach, in welchem eine dieser Zahlen, wie 9, sich befände, zweyen Reyhen, einer horizontalen und einer verticalen zugehörte, die Summe der in den übrigen Fächern jeder dieser Reyhen befindlichen Zahlen 6 machen; man hätte mithin unter den sechs übrigen Zahlen $\begin{matrix}2\\8\end{matrix}, \begin{matrix}3\\7\end{matrix}, \begin{matrix}4\\6\end{matrix}$ zwey Paare von Zahlen zu finden, deren Summe 6 machte. Es gibt aber unter diesen übrigen Zahlen nur ein Paar, nämlich 2 und 4, deren Summe 6 macht; folglich kann man die Zahlen 1 und 9 nicht in die äussersten Fächer einer diagonalen Reyhe sezen; man muß sie also in eine der mittlern horizontalen oder verticalen Reyhen sezen. Man seze z. B. 1 in das mittlere Fach der ersten horizontalen Reyhe, und mithin 9 in das mittlere der dritten horizontalen. So wird man die beyden Zahlen 2 und 4 in die beyden äussersten Fächer der dritten horizontalen Reyhe sezen müssen, und die Zahlen 8 und 6 in die gegenüberliegende Fächer der Diagonalreyhen, zu welchen jene Fächer gehören. Die übrigen Zahlen 7 und 3 werden in die beyden übrigen Fächer gesezt werden, so daß sie die zwischen den Fächern, in welchen die Zahlen 6 und 2, 8 und 4 sich befinden, liegenden Fächer beziehungsweise einnehmen.

Algebraisch. Man bezeichne die erste, zweyte und dritte Horizontalreyhe beziehungsweise durch H', H'', H''', und ebenso die erste, zweyte und dritte Verticalreyhe durch V', V'', V'''. Man bezeichne ein Fach durch die beyden Reyhen, die horizontale und die verticale, denen es zugehört; so daß z. B. das erste Fach, welches der ersten horizontalen und der ersten verticalen Reyhe zugehört, durch $H'V'$ bezeichnet werde.

Die in das Fach $H''V''$ zu sezende Zahl sey y:
die in die Fächer $H'V'$, $H'V'''$ zu sezenden Zahlen seyen beziehungsweise x und z;
so werden die in die Fächer $H'''V'''$, $H'''V'$ zu sezenden Zahlen beziehungsweise $15-x-y$ und $15-z-y$ seyn; und
die in die Fächer $H'V''$, $H''V'$, $H''V'''$, $H'''V''$ zu sezenden Zahlen $15-x-z$, $y+z-x$, $y+x-z$, $x+2y+z-15$.

Die Summe der in die Fächer der zweyten Horizontalreyhe oder in die Fächer der zweyten Verticalreyhe zu sezenden Zahlen findet sich = 3y. Man hat mithin 3y=15, y=5. Man findet also durch dieses algebraische Verfahren ebenso, wie man unmittelbar durch Räsonnement gefunden hat, daß die in das mittlere Fach $H''V''$ zu sezende Zahl 5 ist.

Da die Summe der in die äussersten Fächer jeder der Reyhen, denen das mittlere Fach zugehört, zu sezenden Zahlen 10 seyn muß, und von diesen Zahlen die eine grösser als 5, die andere kleiner seyn muß um die nämliche Grösse; so wird man veranlaßt, diese Zahlen durch ihre halbe Summe und halbe Differenz zu benennen. Es seyen die in die Fächer $H'V'$, $H'''V'''$ zu sezenden Zahlen beziehungsweise

$$5+x,\ 5-x$$

und die in die Fächer . . . . . $H'V'''$, $H'''V'$ zu sezenden Zahlen seyen auch beziehungsweise $5-z$, $5+z$; so werden die in Fächer $H'V''$, $H''V'$, $H''V'''$, $H'''V''$ zu sezenden Zahlen beziehungsweise seyn $5-x+z$, $5-x-z$, $5+x+z$, $5+x-z$.

Von den beyden Größen x und z ist eine größer als die andere, und da übrigens beyde ganz einerley Rolle spielen, so kann man eine von ihnen welche man will größer als die andere sezen, z. B. $x \trianglerighteq z$. Da $5 \mp x$ nicht größer seyn darf als 9, so ist der gröste Werth von x, 4. Aber wenn $x=4$ wäre, so würde dem Fach $H''V'''$, $z=0$ entsprechen: mithin ist der gröste Werth von x, 3. Es sey demnach $x=3$; da nun $5+x+z \leqq 9$, oder $x+z \leqq 4$; so muß $z \leqq 1$ seyn; folglich $z=1$; und alle Fächer finden sich von verschiedenen Zahlen besezt.

Sezt man $x=2$, und folglich $z=1$; so würden die in die Fächer $H'V'$, $H'''V'''$, $H'V'''$, $H'''V'$, $H'V''$, $H''V'$, $H''V'''$, $H'''V''$ zu sezenden Zahlen

7, 3, 4, 6, 4, 2, 8, 6,

mithin nicht alle von einander verschieden seyn. Mithin sind die Werthe $\begin{matrix} x=3 \\ z=1 \end{matrix}$ die einzigen, welche in der Voraussezung $x \trianglerighteq z$, der Frage Genüge leisten.

Die auf die eben gewiesene Art den neun ersten natürlichen Zahlen gegebene Anordnung, bey welcher die in die drey Fächer jeder verticalen, horizontalen und diagonalen Reyhe zu sezenden Zahlen immer einerley Summe haben, heißt ein magisches Quadrat. Die Mathematiker haben dieselbe auf jede Quadratzahl von Gliedern einer arithmetischen Progression ausgedehnt, und sich weit mehr damit beschäftigt, als es ein Gegenstand bloßer Neugierde verdiente, der für eine sinnreiche Uebung in der Analyse gelten kann, sonst aber zu keiner nüzlichen Anwendung dient. Ich glaube mich daher nicht länger bey diesem mathematischen Spiele verweilen zu müssen. Man sehe die alten und neuen Memoires von Paris, Prestet u. a.

§. 124.

Aufgabe. Drey Zahlen in arithmetischer Proportion finden, deren Summe der Quadrate 200 sey, und von welchen das Quadrat des mittlern Glieds die Quadrate der beyden äussersten um zwey Einheiten übertreffe.

Durch Räsonnement. Das Quadrat des mittlern Glieds oder das Quadrat der halben Summe der beyden äussersten ist größer als das Product der beyden äussern um das Quadrat der halben Differenz dieser leztern, oder des Unterschieds zwischen einer derselben und der mittlern. Mithin ist das Quadrat der gemeinschaftlichen Differenz der Glieder 4, und diese Differenz selbst ist 2. Die Summe der Quadrate der beyden äussersten beträgt so viel als zweymal das Quadrat ihrer halben Summe und zweymal das Quadrat ihrer halben Differenz zusammen, oder soviel als zweymal das Quadrat des mittlern Glieds und zweymal das Quadrat des gemeinschaftlichen Unterschieds der Glieder, das ist, zweymal das Quadrat des mittlern Glieds + 8. Folglich übertrift die Summe der Quadrate der drey Zahlen das dreyfache Quadrat des mittlern Glieds um 8 Einheiten. Mithin ist das dreyfache Quadrat des mittlern Glieds 192; das Quadrat des mittlern Glieds 64, und das mittlere Glied 8. Folglich ist die gesuchte Proportion 10, 8, 6.

Summe der Quadrate $100+64+36=200$
Quadrat des mittlern Glieds 64
Produkt der äussersten 60
Differenz 4

Algebraisch. Ben. Summe der beyden äussersten $2x$
Differenz . . . . $2y$
die äussersten $\begin{cases} x+y \\ x-y \end{cases}$, das mittlere x
Produkt der äussersten $xx-yy$
Quadrate der drey Glieder $\begin{cases} xx+2xy+yy \\ xx \\ xx-2xy+yy \end{cases}$
Summe der Quadrate $3xx+2yy$

Bed. $\begin{cases} xx-(xx-yy)=4 \\ 3xx+2yy=200 \end{cases}$

Red. $yy=4$, $2yy=8$

$$3xx+2yy=200$$

$$3xx=192$$
$$xx=64,\ x=\pm 3$$
$$y=\pm 2$$

Eigentlich läßt die Frage vier Antworten zu; das erste Glied kann nämlich vier Werthe haben

$+8+2=+10$
$+8-2=+6$
$-8+2=-6$
$-8-2=-10$

welchen die vier Werthe

$+8+2=+10$
$-8-2=-10$
$-8+2=-6$
$+8-2=+6$

des dritten Glieds entsprechen, so daß die vier der Frage Genüge leistenden Proportionen sind

$+10, +8, +6$
$+6, +8, +10$
$-6, -8, -10$
$-10, -8, -6.$

Aber die beyden ersten sind nur in der Ordnung der Glieder von einander verschieden; ebenso die beyden leztern. Und die erste und zweyte sind von der dritten und vierten nur in Absicht auf die Zeichen verschieden.

Allgemein. Die Summen der Quadrate dreyer Glieder einer arithmetischen Proportion ist q, und das Quadrat des mittlern übertrift das Produkt der beyden äussern um die Größe p.

Ben. Halbe Summe der äussern Glieder oder mittleres Glied x
halbe Differenz der beyden äussern . . . . . y
Progression . . . . . x+y, x, x—y
Summe der Quadrate der beyden äussern . . 3xx+2yy
Ueberschuß des Quadrats des mittlern über das Product der äussern . . . . . yy.

Bed. $\begin{cases} yy = p \\ 3xx+2yy = q. \end{cases}$

Red.
$$2yy = 2p$$
$$3xx+2yy = q$$
$$3xx = q-2p,\quad xx = \frac{q-2p}{3}$$

Aufl.
$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{q-p}{3}\right)}$$
$$y = \pm\sqrt{p}$$

Progressionen
$$\sqrt{\left(\frac{q-2p}{3}\right)}+\sqrt{p},\ \sqrt{\left(\frac{q-2p}{3}\right)},\ \sqrt{\left(\frac{q-2p}{3}\right)}-\sqrt{p}$$
$$\sqrt{\left(\frac{q-2p}{3}\right)}-\sqrt{p},\ \sqrt{\left(\frac{q-2p}{3}\right)},\ \sqrt{\left(\frac{q-2p}{3}\right)}+\sqrt{p}$$
$$-\sqrt{\left(\frac{q-2p}{3}\right)}+\sqrt{p},\ -\sqrt{\left(\frac{q-2p}{3}\right)},\ -\sqrt{\left(\frac{q-2p}{3}\right)}-\sqrt{p}$$
$$-\sqrt{\left(\frac{q-2p}{3}\right)}-\sqrt{p},\ -\sqrt{\left(\frac{q-2p}{3}\right)},\ -\sqrt{\left(\frac{q-2p}{3}\right)}+\sqrt{p}.$$

§. 125.

Aufgabe. Vier Zahlen in arithmetischer Progression finden, von welchen man die Summe der Quadrate 4q kennt, und von denen das Produkt der mittlern das Produkt der äussersten um die gegebene Größe 8p übertrift.

Ben. Summe der mittlern 2s
Differenz der mittlern 2d

die mittlern $\begin{matrix} s+d \\ s-d \end{matrix}$, die äussersten $\begin{matrix} s+3d \\ s-3d \end{matrix}$

Produkt der mittlern ss— dd
Produkt der äussersten ss—9dd
Unterschied dieser Produkte 8dd
Summe der Quadrate der mittlern 2ss+ 2dd
Summe der Quadrate der äussersten 2ss+18dd
Summe der vier Quadrate 4ss+20dd

Bed. $\begin{cases} 8dd = 8p \\ 4ss + 20dd = 4q. \end{cases}$

Red. $\begin{cases} dd = p \\ ss + 5dd = q \end{cases}$ $\quad$ $\begin{matrix} 5dd = 5p \\ ss + 5dd = q \end{matrix}$

$$ss = q - 5p.$$

Aufl. $s = \pm\sqrt{(q-5p)}$
$d = \pm\sqrt{p}$

$s+d = +\sqrt{(q-5p)} + \sqrt{p}$; $s-d = +\sqrt{(q-5p)} - \sqrt{p}$
$+\sqrt{(q-5p)} - \sqrt{p}$ $\quad$ $+\sqrt{(q-5p)} + \sqrt{p}$
$-\sqrt{(q-5p)} + \sqrt{p}$ $\quad$ $-\sqrt{(q-5p)} - \sqrt{p}$
$-\sqrt{(q-5p)} - \sqrt{p}$ $\quad$ $-\sqrt{(q-5p)} + \sqrt{p}$

$s+3d = +\sqrt{(q-5p)} + 3\sqrt{p}$; $s-3d = +\sqrt{(q-5p)} - 3\sqrt{p}$
$+\sqrt{(q-5p)} - 3\sqrt{p}$ $\quad$ $+\sqrt{(q-5p)} + 3\sqrt{p}$
$-\sqrt{(q-5p)} + 3\sqrt{p}$ $\quad$ $-\sqrt{(q-5p)} - 3\sqrt{p}$
$-\sqrt{(q-5p)} - 3\sqrt{p}$ $\quad$ $-\sqrt{(q-5p)} + 3\sqrt{p}$

ss— dd = q—6p $\quad$ 2ss+ 2dd = 2q—8p
ss—9dd = q—14p $\quad$ 2ss+18dd = 2q+8p
8dd = 8p $\quad$ 4ss+20dd = 4q.

Die vorgelegte Frage läßt demnach vier Auflösungen zu; aber die zwey erstern sind nur durch die Ordnung ihrer Glieder verschieden, je nachdem man die Progression als abnehmend oder wachsend betrachtet; und ebenso verhält es sich mit den zwey leztern. Und die Glieder der ersten und zweyten sind von den Gliedern der vierten und dritten beziehungsweise nur in Absicht der Zeichen verschieden.

Anmerkung. Damit die Aufgabe möglich sey, muß $q \geqq 5p$ seyn: so daß der kleinste Werth, den q haben kann, 5p ist.

Andere Aufgabe. Die Summe der Quadrate der vier Glieder ist 49, und die Summe der Produkte der äussern und mittlern Glieder ist 2p.

Man hat die Bedingungen $\begin{cases} 4ss+20dd=4q \\ 2ss-10dd=2p \end{cases}$

oder $ss+5dd=q$

$ss-5dd=p$

Woraus man erhält $2ss=q+p$, $s=\pm\sqrt{\left(\frac{q+p}{2}\right)}$

$10dd=q-p$, $d=\pm\sqrt{\left(\frac{q-p}{10}\right)}$

Anmerkung. Man kann diese Fragen auf jede Anzahl von Gliedern ausdehnen, wenn man den Ausdruk der Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen voraussezt.

Siebentes Kapitel.

Ueber die unbestimmten Aufgaben vom ersten Grade.

Wir haben schon eine große Anzahl von Beyspielen unbestimmter Aufgaben gehabt, deren Unbestimmtheit daher rührte, daß von den ausgesagten Bedingungen, deren Anzahl dem Anschein nach der Anzahl der unbekannten Größen gleich war, in gewissen besondern Fällen eine und die andere auf dasselbe hinaus liefen: so daß die Anzahl der von einander unabhängigen Bedingungen in diesen Fällen kleiner war als die Anzahl der unbekannten Größen.

In den Fragen, welche den Gegenstand dieses Kapitels ausmachen, ist die Anzahl der ausgesagten Bedingungen kleiner als die Anzahl der unbekannten Grösen; aber die Unbestimmtheit der Fragen ist in sofern nicht vollständig, als die unbekannten Grösen darauf eingeschränkt werden, daß sie ganze positive Zahlen seyn sollen. Ich will die allgemeine Entwiklung dieser Fragen durch einige äußerst einfache Beyspiele einleiten.

§. 126.

Aufgabe. Alle ganze und positive Zahlen finden, deren Summe 10 ist.

Bey dieser Frage ist nur eine Bedingung bestimmt, welche sich auf die Summe der beyden gesuchten Grösen bezieht. Sie würde daher eine unbestimmte Anzahl von Auflösungen zulassen, wenn nicht die Einschränkung, daß die gesuchten Zahlen ganze und positive seyn sollen, diese Anzahl äusserst verminderte. Vermittelst dieser lezten Bedingung wird eine der gesuchten Zahlen darauf eingeschränkt, daß sie eine ganze Zahl, die kleiner ist als 10, seyn muß: welches die Werthe jeder der beyden Zahlen nur auf die neun folgende zurükführt:

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9; \\ 9, & 8, & 7, & 6, & 5, & 4, & 3, & 2, & 1; \end{matrix}$$

und selbst diese neun Auflösungen reduciren sich auf fünf von einander verschiedenen Auflösungen, so fern von den beyden Zahlen, von welchen die Rede ist, eine an die Stelle der andern gesezt werden kann:

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5. \\ 9, & 8, & 7, & 6, & 5. \end{matrix}$$

Ebenso: Man verlange alle stetige arithmetische Proportionen von drey ganzen und positiven Gliedern, deren Summe 12 ist.

Das mittlere Glied ist ein Drittheil von 12 oder 4. Es sey d die Differenz zweyer nächst auf einander folgenden Glieder; so sind die drey Glieder $4-d$, 4, $4+d$, und

damit die Proportion aus ganzen und positiven Gliedern bestehe, so muß d kleiner als 4 seyn. Die Werthe von d sind demnach 1, 2, 3
und diesen entsprechen die Proportionen 3, 4, 5
2, 4, 6
1, 4, 7.

Ein ähnliches Räsonnement läßt sich auf arithmetische Progressionen von einer gegebenen Anzahl Glieder anwenden, deren Summe ein vielfaches von der Anzahl der Glieder, und welche alle ganze und positive Zahlen seyn sollen.

Man seze statt der Summe den Unterschied bekannt, und verlange z. B. alle ganze und positive Zahlen zu finden, deren Unterschied eine gegebene ganze und positive Zahl d sey.

Man addire zu dem gegebenen Unterschied irgend eine ganze und positive Zahl. Man wird diese für die kleinere der gesuchten Zahlen nehmen können, und die grössere wird die Summe dieser Zahl und des Unterschieds seyn.

Ebenso gibt es eine unbestimmte Anzahl arithmetischer Progressionen von ganzen und positiven Zahlen, deren Differenz eine gegebene ganze und positive Zahl sey.

Da diese beyden Gattungen von Fragen keine Schwürigkeiten haben, so halte ich mich nicht länger damit auf.

§. 127.

Aufgabe. Eine Bäurinn, die ihre Eyer zählt, bemerkt, daß sie dieselbe paarweise, und auch zu drey und drey zählen kann, ohne daß ein Rest übrig bleibt. Wie kann man diese doppelte Bemerkung benuzen, um sich einen Begriff von der Anzahl ihrer Eyer zu machen?

Diese Frage lauft darauf hinaus, den Ausdruk der Zahlen zu finden, welche zugleich vielfache von 2 und von 3 sind. Die kleinste dieser Zahlen ist 6, ihr allgemeiner Ausdruk ist 6e, indem man für e irgend eine ganze und positive Zahl sezt.

Allgemein seyen p und q zwey ganze Zahlen, welche Primzahlen zu einander seyen: das kleinste vielfache der einen und der andern dieser beyden Zahlen ist pq, und der allgemeine Ausdruk der vielfachen dieser beyden Zahlen ist pqe.

Hätte die Bäurinn bemerkt, daß sie ihre Eyer sowohl paarweise als zu vieren zählen könnte; so wäre ihre erste Bemerkung in der zweyten enthalten, und der allgemeine Ausdruk der Anzahl ihrer Eyer wäre 4e gewesen. Allgemein: wenn eine Zahl ein Vielfaches einer andern ist, so ist jedes Vielfache der ersten auch ein Vielfaches der zweyten. Wenn nämlich mp ein Vielfaches von p ist; so ist jedes Vielfache mpe von mp auch ein Vielfaches von p; nämlich mpe = me × p.

Die Bäurinn habe bemerkt, daß sie ihre Eyer sowohl nach 4 als nach 6 zählen könne. Da 4 und 6 eine gemeinschaftlichen Theile haben, nämlich 2; so ist die kleinste zugleich durch 4 und durch 6 theilbare Zahl die Helfte des Produkts 4 × 6 oder 12, und der allgemeine Ausdruk der Zahlen, welche zugleich Vielfache von 4 und von 6 sind, ist 12e.

Allgemein: wenn zwey Zahlen einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so ist die kleinste Zahl, welche ein Vielfaches dieser beyden Zahlen ist, das Produkt dieser beyden Zahlen durch den gemeinschaftlichen Theiler dividirt, oder auch das Produkt einer derselben durch den Quotienten, welchen die Division der andern durch diesen gemeinschaftlichen Theiler gibt. Es seyen nämlich mp und mq zwey Zahlen, welche einen gemeinschaftlichen Theiler m haben: die kleinste Zahl, welche ein Vielfaches von beyden ist, ist $\frac{mp \times mq}{m} = mpq$, und alle Vielfache der einen und der andern dieser beyden Zahlen sind mpqe.

§. 128.

Man seze, die Bäurinn habe beym Zählen ihre Eyer bemerkt, daß sie dieselbe zwar paarweise zählen könne, aber

daß ihr eines übrig bleibe, wenn sie dieselbe zu drey und drey zähle.

Diese doppelte Bemerkung lauft darauf hinaus, daß man gerade Zahlen finde, welche die Vielfachen von 3 um eine Einheit übertreffen. Die kleinste dieser Zahlen ist 4; und wenn man zu dieser Zahl eine zugleich durch 3 und durch 2 theilbare Zahl hinzufügt, so ist der allgemeine Ausdruk der gesuchten Zahlen $6e+4$.

Wäre die Bemerkung gewesen, daß beym Zählen der Eyer zu drey und drey nichts übrig bliebe, und daß eines übrig bliebe, wenn man sie paarweise zählte; so hätte sie darauf geleitet, ungerade Vielfache von 3 zu finden. Das kleinste dieser Vielfachen ist 3, und ihr allgemeiner Ausdruk ist die Summe von 3 und einem Vielfachen von 6, nämlich $6e+3$.

Hätte die Bäurinn berichtet, daß, wenn sie ihre Eyer paarweise zählte, nichts übrig bliebe, daß ihr aber eines übrig bliebe, wenn sie sie zu vier und vier zählte; so wäre ihre Beobachtung oder ihr Bericht unrichtig gewesen. Wenn nämlich eine Zahl ein Vielfaches von 2 ist, so ist sie entweder auch ein Vielfaches von 4, oder sie ist von einem Vielfachen von 4 um zwey Einheiten (aber nicht um eine) unterschieden. Allgemein: wenn eine Zahl ein Vielfaches einer gegebenen Zahl p ist, und wenn eine Zahl mp ein Vielfaches von p ist; so ist eine durch p theilbare Zahl vom Vielfachen derselben mp entweder um nichts, oder um ein Vielfaches von p, das kleiner als mp ist, unterschieden. So sind die Vielfachen von 3 entweder zugleich Vielfache von 12, oder sie sind von diesen Vielfachen um eine der Zahlen 3, 6 unterschieden.

Ebenso wenn die Bäurinn berichtete, daß sie ihre Eyer zu vier und vier habe zählen können, daß ihr aber eines übrig geblieben sey, wenn sie dieselbe zu sechs und sechs zählte, so wäre ihr Bericht oder ihre Beobachtung wiederum unrichtig. Da nämlich die Anzahl ihrer Eyer ein Vielfaches von vier ist, so ist sie auch ein Vielfaches von

zwey; und folglich wenn man sie durch sechs dividirt, so muß der Rest, wenn es einen gibt, zwey oder vier, er kann aber nicht eins seyn. Allgemein: wenn zwey Zahlen einen gemeinschaftlichen Theiler haben, und wenn eine Zahl ein Vielfaches einer derselben ist; so ist sie entweder auch ein Vielfaches der andern, oder von derselben um irgend ein Vielfaches ihres gemeinschaftlichen Theilers unterschieden. Wenn nämlich zwey Zahlen mp und mp' einen gemeinschaftlichen Theiler m haben; so ist ein Vielfaches einer derselben mp entweder zugleich ein Vielfaches von mp', oder von einem solcher unterschieden um eines der Vielfachen von m, die kleiner als mp' sind.

§. 129.

Die Kleinheit der Zahlen zwey und drey hat die Bestimmung der Vielfachen von zwey, welche die Vielfache von drey um eine Einheit übertreffen, so wie die Vielfachen von drey, welche die Vielfache von zwey um eine Einheit übertreffen, sehr leicht gemacht. Aber die Antwort auf ähnliche Fragen bietet sich nicht so geschwinde dar, wenn die gegebenen Zahlen beträchtlich sind.

Man verlange zum Beyspiel die Vielfache von 5, welche die Vielfache von 13 um eine Einheit übertreffen.

Die Vielfache von 13 durch die Zahlen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10....

sind beziehungsweise

13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130....

Die Zahlen, welche diese Vierfache um eine Einheit übertreffen, sind

14, 27, 40, 53, 66, 79, 92, 105, 118, 131....

Nun aber endigen sich die Vielfache von fünf mit fünf oder Null: die kleinste der leztern Zahlen, die sich in diesem Fall befindet, ist 40. Folglich ist 40 die kleinste der gesuchten Zahlen. Wenn man zu dieser Zahl irgend ein Vielfaches von 5 und von 13, nämlich 65e, hinzufügt, so

erhält man als allgemeinen Ausdruk der gesuchten Zahlen 65e+40. Die Reyhe der gesuchten Zahlen ist mithin 40, 105, 170, 235, 300, 365.....

Ebenso haben die Vielfache von 5, welche um zwey, drey, vier Einheiten grösser sind, als Vielfache von 13, zum allgemeinen Ausdruk 65e+15, 65e+55, 65e+30.

Der eingeschlagene Weg hat uns in diesem besondern Fall auf geschwinde und leichte Art auf die gesuchten Ausdrücke geführt: Wenn aber die gegebenen Zahlen sehr gros wären, so würde derselbe länger werden, und man würde mehr Zahlen aufzuzählen haben, welche eine der verlangten Eigenschaften besässen, aber ausgeschlossen werden müßten, so fern sie nicht auch die andere Eigenschaft in sich vereinigten.

Es sey demnach aufgegeben, die Vielfache von 5 zu finden, welche um eine gegebene Zahl r die Vielfache von 13 übertreffen.

Die Zahl, welche angibt, wie vielmal 5 die gegebene Zahlen sind, sey m,
und die Zahl, ... 13 . . . sey n;
so erhält man für die gesuchten Zahlen folgende zwey Ausdrücke

5m

13n+r

Bed. $5m = 13n + r$.

Red. $m = 2n + \frac{3n+r}{5}$. Nun soll m eine ganze Zahl seyn; folglich muß ihr Ausdruk $2n + \frac{3n+r}{5}$ eine ganze Zahl seyn. Aber der Theil 2n muß eine ganze Zahl seyn; folglich muß der andere Theil $\frac{3n+r}{5}$ auch eine ganze Zahl seyn. Es sey e eine ganze Zahl; so hat man

$\frac{3n+r}{5} = e$, $3n + r = 5e$, $3n = 5e - r$, $n = e + \frac{2e-r}{3}$.

Vermöge des nämlichen Räsonnements muß n eine ganze Zahl seyn: folglich muß ihr Ausdruk $e + \frac{2e-r}{3}$ eine ganze

Zahl seyn; aber ihr Theil e ist eine ganze Zahl; folglich muß der andere Theil $\frac{2e-r}{3}$ eine ganze Zahl seyn. Diese ganze Zahl sey e'; so erhält man

$$\frac{2e-r}{3}=e',\ 2e-r=3e',\ 2e=3e'+r,\ e=e'+\frac{e'+r}{2}.$$

Nach demselben Räsonnement muß e eine ganze Zahl seyn; folglich muß auch $e'+\frac{e'+r}{2}$ eine ganze Zahl seyn; aber e' ist eine ganze Zahl; mithin muß $\frac{e'+r}{2}$ eine ganze Zahl seyn. Diese ganze Zahl sey e''; so erhält man

$$\frac{e'+r}{2}=e'',\ e'+r=2e'',\ e'=2e''-r.$$

Man wird daher vermittelst der auf einander folgenden Gleichungen

$$m=2n+e$$
$$n=e+e'$$
$$e=e'+e''$$
$$e'=2e''-r$$

die gesuchten Zahlen durch die ganze Zahl e'' und den Rest r ausdrücken. Da nämlich

$e'=2e''-r$
$e(=e'+e'')=3e''-r$
$n(=e+e')=5e''-2r$
$m(=2n+e)=13e''-5r$
$5m=65e''-25r$
$13n+r=65e''-26r+r=65e''-25r.$

Anmerkung. Die Coefficienten 2 und 5 von r in den Ausdrücken von n und m sind die kleinsten Zahlen, deren Producte durch die gegebenen Zahlen 13 und 5 um eine Einheit unterschieden sind.

Werthe von r, correspondirende Reyhen, Allgemeine Ausdrüke

1	40, 105, 170, 235, 300 . .	65e+40
2	15, 80, 145, 210, 275 . .	65e+15
3	55, 120, 185, 250, 315 . .	65e+55
4	30, 45, 160, 225, 290 . .	65e+30

5	.	.	.	5, 70, 135, 200, 265	.	.	65e + 5
6	.	.	.	45, 110, 175, 240, 305	.	.	65e + 45
7	.	.	.	20, 85, 150, 215, 280	.	.	65e + 20
8	.	.	.	60, 125, 190, 255, 320	.	.	65e + 60
9	.	.	.	35, 100, 165, 230, 295	.	.	65e + 35
10	.	.	.	10, 75, 140, 205, 270	.	.	65e + 10
11	.	.	.	50, 115, 180, 245, 310	.	.	65e + 50
12	.	.	.	25, 90, 155, 220, 285	.	.	65e + 25.

Zweyte Anmerkung. Aus der Gleichung $5m = 13n + r$, hätte man die Gleichung $m = 3n - \frac{2n-r}{5}$ ziehen können; in Betracht daß die Zahl 13 dem dreyfacheu von fünf näher kommt als seinem doppelten. Man hätte ebenfalls gehabt

$$\frac{2n-r}{5} = e,\ 2n = 5e + r,\ n = 2e + \frac{e+r}{2}$$

$$\frac{e+r}{2} = e',\ e + r = 2e',\ e = 2e' - r$$

$$n(= 2e + e') = 5e' - 2r$$

$$m(= 3n - e) = 13e' - 5r;$$

woraus man die nämlichen Ausdrücke auf eine kürzere Art erhält.

Dritte Anmerkung. Da $5m = 13n + r$, so ist $\frac{5}{13} = \frac{n}{m} + \frac{r}{13m}$, mithin ist $\frac{r}{13m}$ die Differenz der beyden Brüche $\frac{5}{13}$ und $\frac{n}{m}$; folglich, wenn r die Einheit ist, so ist $\frac{1}{13m}$ die Differenz der beyden Brüche $\frac{5}{13}$ und $\frac{n}{m}$. Mithin sind die Brüche $\frac{3}{8}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \frac{18}{47}, \frac{23}{60}, \ldots \frac{5e+3}{13e+8}$ alle so beschaffen, daß der Bruch $\frac{5}{13}$ sie um einen Bruch, übertrift, dessen Zähler die Einheit und dessen Nenner das Produkt ihres Nenners durch 13 ist.

Verändert man das Zeichen von r, so erhält man ebenfalls die Vielfache von 5, welche um eine Einheit kleiner sind als die Vielfache von 13: man erhält

$n = 5e'' + 2r$, und da $5m = 13n - r$

$m = 13e'' + 5r$ $\qquad \frac{5}{13} = \frac{n}{m} - \frac{r}{13m}$;

und mithin, $r = 1$ gesezt, sind die Brüche

$$\frac{2}{5}, \frac{7}{18}, \frac{12}{31}, \frac{17}{44}, \frac{22}{57}, \frac{27}{70} \ldots\ldots \frac{5e+2}{13e+5}$$

alle so beschaffen, daß der Bruch $\frac{5}{13}$ kleiner ist als dieselbe um einen Bruch, dessen Zähler die Einheit, und dessen Nenner das Produkt von 13 durch ihren Nenner ist. Man hat daher folgende Reyhen:

$\frac{3}{8}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \frac{18}{47}, \frac{23}{60} \ldots\ldots \frac{5e+3}{13e+8}$, Brüche die kleiner sind als $\frac{5}{13}$,

so daß $\frac{5}{13} = \frac{5e+3}{13e+8} + \frac{1}{13(13e+8)}$;

$\frac{2}{5}, \frac{7}{18}, \frac{12}{31}, \frac{17}{44}, \frac{22}{57} \ldots\ldots \frac{5e+2}{13e+5}$, Brüche die größer sind als $\frac{5}{13}$,

so daß $\frac{5}{13} = \frac{5e+2}{13e+5} - \frac{1}{13(13e+5)}$.

Von diesen Brüchen sind die beyden ersten jeder Reyhe $\frac{3}{8}$ und $\frac{2}{5}$ die einzigen, welche aus beziehungsweise kleinern Gliedern als der vorgelegte Bruch $\frac{5}{13}$ bestehen.

In diesen beyden Reyhen, behaupte ich, daß zwey zunächst auf einander folgende Brüche in Beziehung gegen einander auch die nämliche Eigenschaft besizen, daß nämlich ihre Differenz ein Bruch sey, dessen Zähler die Einheit und dessen Nenner das Produkt ihrer Nenner ist.

Einmal hat diese Eigenschaft Statt für die beyden ersten Brüche jeder Reyhe: nämlich

$$1^{\circ}.\ \frac{8}{21} - \frac{3}{8} = \frac{64}{168} - \frac{63}{168} = \frac{1}{168}.$$

$$2^{\circ}.\ \frac{2}{5} - \frac{7}{18} = \frac{36}{90} - \frac{35}{90} = \frac{1}{90}.$$

Sodenn seyen zwey aufeinander folgende Brüche der ersten Reyhe $\frac{5e+3}{13e+8}$ und $\frac{5e+8}{13e+21}$: ich behaupte, daß

$$\frac{5e+8}{13e+21} - \frac{5e+3}{13e+8} = \frac{1}{(13e+8)(13e+21)}.$$

Es ist nämlich $\frac{5e+8}{13e+21} - \frac{5e+3}{13e+8}$

$$= \frac{5.13ee + \begin{matrix}5.\ 8e\\ 8.13e\end{matrix} + 8.8}{(13e+21)(13e+8)} - \frac{5.13ee + \begin{matrix}3.13e\\ 5.21e\end{matrix} + 3.21}{(13e+21)(13e+8)}$$

Da nun $\frac{5}{13} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8.13}$, mithin $5.8 = 3.13 + 1$

und $\frac{5}{13} - \frac{8}{21} = \frac{1}{13.21}$, $\cdot\cdot\cdot$ $8.13 = 5.21 - 1$

folglich $5.8 + 8.13 = 3.13 + 5.21$

so ist $\frac{5e+8}{13e+21} - \frac{5e+3}{13e+8} = \frac{8.8 - 3.21}{(13e+21)(13e+8)}$

$$= \frac{8.21\left(\frac{8}{21} - \frac{3}{8}\right)}{(13e+21)(13e+8)} = \frac{1}{(13e+21)(13e+8)}$$

Ebenso zeigt man für die Brüche der zweyten Reyhe, daß

$$\frac{5e+2}{13e+5} - \frac{5e+7}{13e+18} = \frac{2.18 - 5.7}{(13e+5)(13e+18)} = \frac{1}{(13e+5)(13e+18)}.$$

Es sey $r = 2$. Man erhält die beyden Reyhen

$$1^{\circ}.\ \frac{1}{3}, \frac{6}{16}, \frac{21}{29}, \frac{16}{42}, \frac{21}{55}, \frac{26}{68}, \cdot\cdot\cdot \frac{5e+1}{13e+3}$$

Brüche, die kleiner sind, als $\frac{5}{13}$, so daß

$$\frac{5}{13} = \frac{5e+1}{13e+3} + \frac{2}{13(13e+3)},$$

und diese Brüche sind abwechslungsweise (nämlich diejenige von ihnen, welche die geraden Stellen einnehmen) die nämlichen mit denen der ersten Reyhe für $r = 1$.

$$2^{\circ}.\ \frac{4}{13}, \frac{9}{23}, \frac{14}{36}, \frac{19}{49}, \frac{24}{62}, \frac{29}{75}, \frac{34}{88}, \cdot\cdot\cdot\cdot \frac{5e+4}{13e+10}$$

Brüche, die größer sind als $\frac{5}{13}$, so daß

$$\frac{5e+4}{13e+10} = \frac{5}{13} + \frac{2}{13(13e+10)};$$

und es sind von denselben abwechslungsweise diejenigen, welche die ungeraden Stellen einnehmen, mit denen der zweyten Reyhe für $r = 1$ einerley.

Sezt man ebenso $r = \pm 3$, $r = \pm 4$, $r = \pm 5$, $r = \pm 6$, $r = \pm 7$ ... so wird man Reyhen von Brüchen erhalten, welche von dem gegebenen $\frac{5}{13}$ um einen Bruch unterschieden sind, dessen Zähler 3, 4, 5, 6, 7 ...., und dessen Nenner das Produkt von 13 durch ihren Nenner ist, und von welchen die Brüche der einen Reyhe kleiner, die der andern größer sind als der vorgelegte Bruch $\frac{5}{13}$.

Ehe ich diese Folgerungen weiter fortseze und verallgemeinere, will ich noch einige besondere Beyspiele vorlegen.

Es seyen die beyden Zahlen 355 und 452. Man verlangt Vielfache dieser Zahlen, deren Differenz eine gegebene Zahl r seye.

Bed. $355m = 452n \pm r$.

Red. $m = n + \frac{97 \pm r}{355} = n + e$

$97n \pm r = 355e$; $97n = 355e \mp r$

$n = \frac{355e \mp r}{97} = 3e + \frac{64e \mp r}{97} = 3e + e'$

$64e \mp r = 97e'$: $64e = 97e' \pm r$,

$e = \frac{97e' \pm r}{64} = e' + \frac{33e' \pm r}{64} = e' + e''$

$33e' \pm r = 64e''$: $33e' = 64e'' \mp r$,

$e' = \frac{64e'' \mp r}{33} = e'' + \frac{31e'' \mp r}{33} = e'' + e'''$

$31e'' \mp r = 33e'''$: $31e'' = 33e''' \pm r$,

$e'' = \frac{33e''' \pm r}{31} = e''' + \frac{2e''' \pm r}{31} = e''' + e^{IV}$

$2e''' \pm r = 31e^{IV}$: $2e''' = 31e^{IV} \mp r$,

$e''' = \frac{31e^{IV} \mp r}{2} = 15e^{IV} + \frac{e^{IV} \mp r}{2} = 15e^{IV} + e^{V}$

$e^{IV} \mp r = 2e^{V}$: $e^{IV} = 2e^{V} \pm r$

$e'''(= 15e^{IV} + e^{V}) = 31e^{V} \pm 15r$

$e''(= e''' + e^{IV}) = 33e^{V} \pm 16r$

$e'(= e'' + e''') = 64e^{V} \pm 31r$

$e\,(= e' + e'') = 97e^{V} \pm 47r$

$n\,(= 3e + e') = 355e^{V} \pm 172r$

$m(= n + e) = 452e^{V} \pm 219r$

$355m = 355 \cdot 452e^{V} \pm 355 \cdot 219r = 355 \cdot 452e^{V} \pm 77745r$

$452n = 452 \cdot 355e^{V} \pm 452 \cdot 172r = 452 \cdot 355e^{V} \pm 77745r$

Anmerkung. Da im Ausdruk $e' = \frac{64e'' \mp r}{33}$ der Coefficient 64 von e'' dem doppelten des Divisors 33 sehr nahe kommt; so kann man mit Vortheil $e' = 2e'' - \frac{2e'' \pm r}{33} = 2e'' - e'''$ sezen. Alsdenn

$\frac{2e''' \pm r}{33} = e''$; $2e'' \pm r = 33e'''$; $2e'' = 33e''' \mp r$,

$e'' = 16e''' + \frac{e''' \mp r}{2} = 16e''' + e'$

$\frac{e''' \mp r}{2} = e''$; $e''' \mp r = 2e''$; $e''' = 2e'' \pm r$.

$e''(= 16e''' + e'') = 33e'' \pm 16r$

$e'(= 2e'' - e''') = 64e'' \pm 31r$

$e(= e' + e'') = 97e'' \pm 47r$.

Auf diese Art kommt man auf dieselben Ausdrücke von n und m, mit Ersparung einer der dazwischen zu gebrauchenden unbestimmten Größen.

Da $355m = 452n \pm r$

so ist $\frac{355}{452} = \frac{n}{m} \pm \frac{r}{452m}$

$= \frac{355e_v \pm 172r}{452e_v \pm 219r} \pm \frac{r}{452(452e_v \pm 219r)}$

Es sey $r = 1$.

Brüche, die kleiner sind als $\frac{355}{452}$

$\frac{172}{229}, \frac{527}{671}, \frac{882}{1123}, \frac{1237}{1575}, \frac{1592}{2027}, \ldots\ldots \frac{355e+172}{452e+219}$

nämlich $\frac{355}{452} = \frac{355e+172}{452e+219} + \frac{1}{452(452e+219)}$

Brüche, die größer sind als $\frac{355}{452}$

$\frac{182}{233}, \frac{538}{685}, \frac{893}{1137}, \frac{1248}{1589}, \frac{1603}{2041} \ldots\ldots \frac{355e-172}{452e-219}$;

nämlich $\frac{355}{452} = \frac{355e-172}{452e-219} - \frac{1}{452(452e-219)}$.

Sey $r = 2$.

Brüche, die kleiner sind als $\frac{355}{452}$

$\frac{344}{438}, \frac{699}{890}, \frac{1054}{1342}, \frac{1409}{1794}, \frac{1764}{2246} \ldots\ldots \frac{355e+344}{452e+438}$;

nämlich $\frac{355}{452} = \frac{355e+344}{452e+438} + \frac{2}{452(452e+438)}$

Brüche, die größer sind als $\frac{355}{452}$

$\frac{11}{14}, \frac{366}{466}, \frac{721}{918}, \frac{1076}{1370}, \frac{1431}{1822} \ldots\ldots \frac{355e+11}{452e+14}$;

nämlich $\frac{355}{452} = \frac{355e+11}{45\ e+14} - \frac{2}{452(452e+14)}$.

In diesen Reyhen sind die Glieder abwechslungsweise die nämlichen mit denen der beyden ersten sich auf $r=1$ beziehenden Reyhen.

Anmerkung. Der Bruch $\frac{3}{4}\frac{5}{5}\frac{5}{2}$ drükt die Fläche des Cirkels aus, dessen Durchmesser die Einheit ist, dem von Adrian Metius bestimmten Näherungsverhältnis des Durchmessers zur Peripherie von 113 zu 355 gemäß; und die Brüche $\frac{1}{2}\frac{7}{1}\frac{2}{9}$, $\frac{1}{2}\frac{8}{3}\frac{3}{3}$, $\frac{1}{1}\frac{1}{4}$ sind zimmlich sich nähernde Ausdrücke dieser Fläche. Insbesondere stimmt der Ausdruk $\frac{1}{1}\frac{1}{4}$ mit dem von Archimed bestimmten Näherungsverhältnis überein.

Anderes Beyspiel. Vielfache von 1393 und 985 finden, welche um eine gegebene Zahl r unterschieden seyen.

Bed. $985m = 1393n \pm r.$

Red. $m = n + \frac{408n \pm r}{985} = n + e$

$\frac{408n \pm r}{985} = e$; $408n \pm r = 985e$; $408n = 985e \mp r$;

$n = 2e + \frac{169e \mp r}{408} = 2e + e'$

$\frac{169e \mp r}{408} = e'$; $169e \mp r = 408e'$; $169e = 408e' \pm r$;

$e = 2e' + \frac{70e' \pm r}{169} = 2e' + e''$

$\frac{70e' \pm r}{169} = e''$; $70e' \pm r = 169e''$; $70e' = 169e'' \mp r$;

$e' = 2e'' + \frac{29e'' \mp r}{70} = 2e'' + e'''$

$\frac{29e'' \mp r}{70} = e'''$; $29e'' \mp r = 70e'''$; $29e'' = 70e''' \pm r$;

$e'' = 2e''' + \frac{12e''' \pm r}{29} = 2e''' + e^{IV}$

$\frac{12e''' \pm r}{29} = e^{IV}$; $12e''' \pm r = 29e^{IV}$; $12e''' = 29e^{IV} \mp r$;

$e''' = 2e^{IV} + \frac{5e^{IV} \mp r}{12} = 2e^{IV} + e^{V}$

$\frac{5e^{IV} \mp r}{12} = e^{V}$; $5e^{IV} \mp r = 12e^{V}$; $5e^{IV} = 12e^{V} \pm r$;

$e^{IV} = 2e^{V} + \frac{2e^{V} \pm r}{5} = 2e^{V} + e^{VI}$

$\frac{2e^{v} \pm r}{6} = e^{vi}$; $2e^{v} \pm r = 5e^{vi}$; $2e^{v} = 5e^{vi} \mp r$;

$$e^{v} = 2e^{vi} + \frac{e^{vi} \mp r}{2}$$

$\frac{e^{vi} \mp r}{2} = e^{vii}$; $e^{vi} + r = 2e^{vii}$; $e^{vi} = 2e^{vii} \pm r$

$e^{v} (= 2e^{vi} + e^{vii}) = 5e^{vii} \pm 2r$

$e^{iv} (= 2e^{v} + e^{vi}) = 12e^{vii} \pm 5r$

$e'''(= 2e^{iv} + e^{v}) = 29e^{vii} \pm 12r$

$e''(= 2e''' + e^{iv}) = 70e^{vii} \pm 29r$

$e'(= 2e'' + e''') = 169e^{vii} \pm 70r$

$e(= 2e' + e'') = 408e^{vii} \pm 169r$

$n(= 2e + e') = 985e^{vii} \pm 408r$

$m(= n + e) = 1393e^{vii} \pm 577r$

$985m = 985 \cdot 1393e^{vii} \pm 985 \cdot 577r$

$= 985 \cdot 1393e^{vii} \pm 568345r$

$1393n = 1393 \cdot 985e^{vii} \pm 1393 \cdot 408r$

$= 1393 \cdot 985e^{vii} \pm 568344r$

$$\frac{n}{m} = \frac{985e^{vii} \pm 408r}{1393e^{vii} \pm 577r}$$

$$\frac{n}{m} - \frac{985}{1393} = \frac{985e^{vii} \pm 408r}{1393e^{vii} \pm 577r} - \frac{985}{1393} = \frac{\pm r}{1393(1393e^{vii} \pm 577r}$$

Sey $r = 1$

Brüche, die kleiner sind als $\frac{985}{1393}$

$\frac{408}{577}, \frac{1393}{1970}, \frac{2378}{3363}, \ldots \frac{985e + 408}{1393e + 577}$

so daß $\frac{985e + 408}{1393e + 577} = \frac{985}{1393} - \frac{1}{1393(139e + 577}$

Brüche, die gröſſer sind als $\frac{985}{1393}$

$\frac{577}{816}, \frac{1562}{2209}, \frac{2547}{3602}, \frac{3532}{4995}, \ldots \frac{985e + 577}{1393e + 816}$,

so daß $\frac{985e + 577}{1393e + 816} = \frac{985}{1393} = \frac{1}{1393(1393e + 816)}$

§. 130.

Zwey Vielfache zweyer gegebenen Zahlen a und b finden, welche um eine gegebene Zahl r unterschieden seyen.

Bed. $ma = nb \pm r$. Es ſey $a < b$.

Red. $m = \frac{nb \pm r}{a}$. Sey $b = qa + R$;

$$m = nq + \frac{nR \pm r}{a} = nq + e;\ nR \pm r = ae$$

$n = \frac{ae \mp r}{R}$. Sey $a = q'R + R'$;

$$n = eq' + \frac{eR' \mp r}{R} = eq' + e';\ eR' \mp r = e'R$$

$e = \frac{e'R \pm r}{R'}$. Sey $R = q''R' + R''$;

$$e = e'q'' + \frac{e'R'' \pm r}{R'} = e'q'' + e'';\ e'R'' \pm r = e''R'$$

$e' = \frac{e''R' \mp r}{R''}$. Sey $R' = q'''R'' + R'''$;

$$e' = e''q''' + \frac{e''R''' \mp r}{R''} = e''q''' + e^{IV};\ e''R''' \mp r = e'''R''$$

$e'' = \frac{e'''R'' \pm r}{R'''}$. Sey $R'' = q^{IV}R''' + R^{IV}$;

$$e'' = e'''q^{IV} + \frac{e'''R^{IV} \mp r}{R'''} = e'''q^{IV} + e^{V};\ e'''R^{IV} \mp r = e^{V}R'''$$

$e''' = \frac{e^{IV}R''' \mp r}{R^{IV}}$. Sey $R''' = q^{V}R^{IV} + R^{V}$;

$$e''' = e^{IV}q^{V} + \frac{e^{IV}R^{V} \mp r}{R^{IV}} = e^{IV}q^{V} + e^{V};\ e^{IV}R^{V} \mp r = e^{V}R^{IV}$$

u. ſ. w.

Bey Unterſuchung dieſes Verfahrens findet man, daß die Zahlen $q, q', q'', q''', q^{IV}, q^{V}$.... die nach einander folgenden Quotienten ſind, welche man erhält, wenn man den gröſten gemeinſchaftlichen Theiler zweyer Zahlen a und b ſucht: und daß die Zahlen $R, R', R'', R''', R^{IV}, R^{V}$... die durch die nämliche Operation ſich ergebenden correſpondirenden Reſte ſiud. Und da die Zahlen b und a als rational vorausgeſezt werden, ſo haben ſie ein gemeinſchaftliches Maas, und jene Operation hat mithin ein Ende: oder man kommt auf einen Reſt R^{M+1} der im vorhergehenden Reſt R^{M} eine ganze Zahl mal enthalten iſt.

Wenn die Zahlen a und b Primzahlen unter einander ſind, ſo iſt der lezte Reſt R^{M+1} die Einheit; man erhält als lezte Gleichung $e^{M} = e^{M+1}R^{M} \pm r$; und mithin erhält

man für e^M eine ganze Zahl. Von dieser steigt man nach einander wieder zu den Werthen von $e^{M-'}$, $e^{M-''}$, $e^{M-'''}$ ... e'', e', e, n, m auf, durch die Gleichungen

$$e^{M-'} = e^M q^{M+'} + e^{M+'}$$
$$e^{M-''} = e^{M-'} q^M + e^M$$
$$e^{M-'''} = e^{M-''} q^{M-'} + e^{M-'}$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$e' = e'' q''' + e'''$$
$$e = e' q'' + e''$$
$$n = e q' + e'$$
$$m = n q + e$$

Wenn a und b nicht Primzahlen zu einander sind, so muß, damit durch die Gleichung $ma = nb \pm r$ möglich sey, r durch das gröste gemeinschaftliche Maas von a und b theilbar seyn. Wenn in der Gleichung $e^M = \frac{e^{M+'} R^M \pm r}{R^{M+'}}$ die Größe R^M durch $R^{M+'}$ theilbar ist, so muß man auch r theilbar durch $R^{M+'}$ haben, und so wird e^M eine ganze Zahl.

Uebrigens läßt die Gleichung $ma = nb \pm r$ im Fall, da a und b nicht Primzahlen zu einander sind, sich immer auf den Fall zurükführen, wo sie Primzahlen zu einander sind, indem man die Glieder der Gleichung $ma = nb \pm r$ durch das gröste gemeinschaftliche Maas von a und b dividirt.

Erste Anmerkung. Die Möglichkeit, die Gleichung $ma = nb \pm r$ (in welcher a und b Primzahlen zu einander sind und r irgend eine Zahl, in ganzen Zahlen aufzulösen, läßt sich unabhängig von dem Verfahren, durch welches man m und n bestimmt, auf folgende Art beweisen.

1°. Man seze in dem Ausdruk $\frac{nb+r}{a}$ statt n alle ganze und positive Werthe, die kleiner sind als a; ich behaupte, daß die Reste, welche man erhält (deren Anzahl a ist), alle einander ungleich seyen.

Es seyen n und n' zwey Werthe von n, welchen die Quotienten q und q', und die Reste R und R' entsprechen; so daß man habe

$$nb+r = qa+R$$
$$n'b+r = q'a+R'$$

und mithin $b(n-n') = a(q-q')+R-R'$

und $q-q' = \frac{b(n-n')}{a} - \frac{R-R'}{a}$

Könnte $R=R'$ seyn; so hätte man $q-q' = \frac{b(n-n')}{a}$; und mithin $b(n-n')$ durch a theilbar; aber b und a sind nach der Voraussezung Primzahlen zu einander: folglich wäre $n-n'$ durch a theilbar; welches unmöglich ist, da n und n', und um so mehr $n-n'$ kleiner als a sind.

2°. Ich behaupte, daß es einen Werth von n gibt, der die Größe $\frac{nb+r}{a}$ zu einer ganzen Zahl macht.

Da nämlich alle Werthe von R, die einem n, das kleiner als a ist, entsprechen, ungleich und kleiner als a sind, so ist ihre Anzahl a, mithin bilden diese Werthe die Reyhe $a-1, a-2, a-3, \ldots 3, 2, 1, 0$. Folglich ist namentlich eine dieser Werthe Null: und in diesem Fall ist $nb+r$ durch a theilbar, oder $\frac{nb+r}{a}$ eine ganze Zahl.

3°. Es sey $\frac{nb+r}{a} = m$; so hat man $ma = nb+r$: und mithin läßt sich die Gleichung $ma = nb+r$ oder $ma-nb = r$ immer in ganzen Zahlen auflösen.

Zweyte Anmerkung. Hat man die Gleichung $ma-nb = r$ aufgelöst; so kann man eine unbestimmte Anzahl anderer Werthe von m und n finden, welche die nämliche Gleichung auflösen.

Man mache nämlich $m' = qb + m$

$n' = qa + n$

so hat man $m'a = qab + ma$

$n'b = qab + nb$

---

und $m'a - n'b = ma - nb = r$

Hat man die Gleichung $ma - nb = 1$ aufgelöst, so kann man die Gleichung $m'a - n'b = r$ auflösen, indem man

$m' = qb + mr$

$n' = qa + nr$ macht.

Alsdenn ist nämlich $m'a = qab + mar$

$n'b = qab + nbr$

$m'a - n'b = r(ma - nb) = r.$

§. 131.

Statt der Zahlen, welche durch zwey gegebene Zahlen dividirt gegebene Reste lassen, wie in den vorhergehenden §. §., soll man Zahlen suchen, welche durch drey oder mehrere gegebene Zahlen dividirt gegebene Reste lassen. Diese leztere Frage läßt sich leicht auf die erstere zurükführen.

Hat man nämlich den Ausdruk der Zahlen gefunden, welche den beyden ersten Bedingungen Genüge leisten, so wird man denselben dem Ausdruk der Zahlen gleich sezen, welche der dritten Bedingung Genüge leisten, und somit einen Ausdruk für die Zahlen finden, welche den drey ersten Bedingungen Genüge leisten. Diesen wird man dem Ausdruk der Zahlen gleich sezen, welche der vierten Bedingung Genüge leisten, und hiedurch einen Ausdruk für die Zahlen bekommen, welche den vier ersten Bedingungen Genüge leisten. Und so wird man immer fortfahren, bis man alle gegebene Bedingungen erschöpft hat.

Beyspiele. Alle Zahlen finden, die durch 7 theilbar sind, durch 3 dividirt 2 zum Rest lassen, durch 4 dividirt 3, und durch 5 dividirt 4 zum Rest lassen.

Die Ausdrücke der gesuchten Zahlen sind $3x+2$, $4y+3$, $5z+4$, $7v$; oder, indem man die Werthe von x, y, z um eine Einheit vermehrt, $3x-1$, $4y-1$, $5z-1$, und $7v$.

1°. Sey $3x-1=4y-1$

$$3x=4y$$
$$x=y+\tfrac{1}{3}y=y+e;\ y=3e$$
$$x=4e$$
$$3x-1=4y-1=12e-1.$$

2°. Sey $12e-1=5z-1$

$$5z=12e;\ z=12e'$$
$$e=5e'$$
$$5z-1=12e-1=60e'-1.$$

3°. Sey $60e'-1=7v$

$$v=9e'-\frac{3e'+1}{7}=9e'-e''$$
$$3e'+1=7e'':\ e'=2e''+\frac{e''-1}{3}=2e''+e'''$$
$$e''-1=3e''';\ e''=3e'''+1$$
$$e'=7e'''+2$$
$$v=60e'''+17$$
$$7v=420e'''+119$$
$$60e'-1=420e'''+119.$$

Die kleinste der gesuchten Zahlen ist 119, und der allgemeine Ausdruk der gesuchten Zahlen ist $420e+119$, wo 420 die kleinste durch jede der Zahlen 3, 4, 5 und 7 theilbare Zahl ist.

Anmerkung. Man hätte in diesem Fall die Zahl 119 durch folgendes Räsonnement bestimmen können.

Da der verlangten Zahl eins fehlt, um durch jede der Zahlen 3, 4, 5 theilbar zu seyn; so fehlt ihr eine Einheit, um ein Vielfaches von jeder der Zahlen 3, 4, 5 zu seyn. Aber die Vielfache jeder der Zahlen 3, 4, 5 sind 60, 120, 180, 240..., mithin ist die gesuchte Zahl in der Reyhe 59, 119, 179, 239... begriffen. In dieser Reyhe ist

die Zahl 119 die kleinste von allen zugleich durch 7 theilbaren Zahlen; folglich ist die kleinste verlangte Zahl 119; und da 420 das kleinste Vielfache jeder der Zahlen 3, 4, 5, 7 ist, so sind die gesuchten Zahlen $420e + 119$ *).

§. 132.

Wir haben im vorhergehenden die Gleichung $ma - nb = \pm r$ in ganzen Zahlen aufgelöst, und bewiesen, daß sie sich immer auflösen und daß eine unbegräuzte Anzahl von Auflösungen derselben sich finden läßt. Es verhält sich nicht ebenso mit der Gleichung $ma + nb = r$; in welcher man verlangt, eine ganze Zahl r in zwey Theile zu theilen, welche ganze Zahlen und durch ganze Zahlen a und b theilbar seyen. Wenn diese Gleichung auflösbar ist, so läßt sie nur eine begrenzte Anzahl von Auflösungen zu: und es kann Fälle geben, da sie gar keine zuläßt. Man verlange z. B. 12 in zwey Theile zu theilen, deren einer durch 3 und der andere durch 5 theilbar sey. Die Paare von Zahlen, deren Summe 12 ist, sind

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 11' & 10' & 9' & 8' & 7' & 6; \end{matrix}$$

unter diesen Paaren gibt es nun keines, dessen Zahlen die verlangte Eigenschaften hätten; mithin ist die verlangte Zerlegung unmöglich. Verlangte man 10 in zwey Theile zu theilen, deren einer durch 4, und der andere durch 3 theilbar wäre; so hätte man die Paare $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9' & 8' & 7' & 6' & 5' \end{matrix}$, von welchen das vierte aus den Zahlen 4 und 6 bestehende der angegebenen Bedingung Genüge leistet.

Ich will das bey dieser Untersuchung zu befolgende allgemeine Verfahren durch einige Beyspiele erläutern.

Erstes Beyspiel. Man hat eine gewisse Anzahl Ellen von einem Stoff, die Elle zu 15 Bazen, und eine gewisse Anzahl Ellen von einem andern Stoff, die Elle zu 19 Bazen gekauft: und für das Ganze 326 fl. bezahlt. Man fragt nach allen Arten, wie der Kauf hat geschehen können.

*) Man sehe noch den Zusaz zu diesem §. am Ende des Kapitels.

Ben. Es sey die Anzahl der Ellen zu 15 Bazen x

. . . . 19 . . . y.

Preis der erstern . . . 15x

Preis der leztern . . . 19y

Bed. $15x+19y=326$.

Red. $15x=326-19y$

$$x=21+\tfrac{11}{15}-y-\tfrac{4y}{15}=21-y-\tfrac{4y-11}{15}=21-y-e$$

$4y-11=15e$, $4y=15e+11$,

$$y=3e+2+\tfrac{3e+3}{4}=3e+2+e'$$

$3e+3=4e'$, $3e=4e'-3$, $e=e'+\tfrac{1}{3}e'-1=e'-1+e''$

$e'=3e''$

$e=4e''-1$

Aufl. $15x=345-15\times 19e''$

$19y=19\times 15e''-19$

$15x+19y=345-19=326$.

Gränzen. Damit der Werth von x positiv sey, muß $23 \geqq 19e''$, folglich $e'' \leqq 1\frac{4}{19}$ seyn.

Damit der Werth von y positiv sey, muß $15e'' \geqq 1$, und $e'' \geqq \frac{1}{15}$ seyn. Aber e'' muß eine ganze Zahl seyn, und zwischen $\frac{1}{15}$ und $1\frac{4}{19}$ gibt es nur eine einzige ganze Zahl nämlich 1; folglich $e''=1$.

$x=23-19e''=4$

$y=15e''-1=14$.

$15x=60$

$19y=266$

$15x+19y=326$

Zweytes Beyspiel. 1000 in zwey Theile theilen, deren einer durch 7, der andere durch 13 theilbar sey.

Bed. $7x+13y=1000$.

Red. $7x = 1000 - 13y = 1001 - 14y + (y-1)$

$$x = 143 - 2y + \frac{y-1}{7} = 143 - 2y + e$$

$$y - 1 = 7e$$

Aufl. $y = 7e + 1$

$$x = 143 - (14e + 2) + e = 141 - 13e$$

$$7x = 987 - 91e$$

$$13y = 13 + 91e$$

$$7x + 13y = 1000$$

Gränzen. $7e + 1 \overline{\geq} 0$; $e \overline{\geq} -\frac{1}{7}$

$$141 - 13e \overline{\geq} 0;\ e \overline{\leq} 10\tfrac{11}{13}$$

e =	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
y =	1,	8,	15,	22,	29,	36,	43,	50,	57,	64,	71
x =	141,	128,	115,	102,	89,	76,	63,	50,	37,	24,	11
7x =	987,	896,	805,	714,	623,	532,	421,	350,	259,	168,	77
13y =	13,	104,	195,	286,	377,	468,	559,	650,	741,	832,	423

Die Summe von je zweyen dieser correspondirenden Zahlen ist beständig 1000. Es gibt mithin 11 Arten, 1000 in zwey Theile zu theilen, deren einer durch 7, der andere durch 13 theilbar ist.

Anmerkung. Man kann die Auflösungen von Fragen der Art, dergleichen wir so eben aufgelöst haben, vermittelst der Formeln für die §. 131 aufgelösten Fragen erhalten.

Man habe nämlich die Gleichung $7x - 13y = 1000$ vermittelst der Formeln

$$x = 141 + 13e$$
$$y = 7e \quad \text{aufgelöst.}$$

Um nun die Gleichung $7x + 13y = 1000$ aufzulösen, muß man das Zeichen von y verändern; so erhält man

$$y = 1 - 7e,\ 7(141 + 13e) + 13(1 - 7e) = 1000.$$

Zufolge dieser Formeln ist $13e + 141 \overline{\geq} 0$; $e \overline{\leq} -10\frac{11}{13}$

$$1 - 7e \overline{\geq} 0;\ e \overline{\leq} \tfrac{1}{7}$$

folglich $e = 0, -1, -2, \ldots\ldots -10$;
verändert man das Zeichen von e, so erhält man

$$x = 141 - 13e$$
$$y = 1 + 7e$$

§. 133.

Im bisherigen übertrift die Anzahl der unbekannten Grösen die Anzahl der Bedingungen um eine Einheit. Wenn die Anzahl der unbekannten Grösen die Anzahl der Bedingungen um zwey, drey, vier . . . Einheiten übertrift, so ist die Frage doppelt, dreyfach, vierfach . . . unbestimmt. Ich werde mich begnügen, durch eine oder zwey auf doppelt unbestimmte Fragen sich beziehende Aufgaben zu zeigen, wie man Fragen dieser Art auf einfach unbestimmte zurükführt.

Erstes Beyspiel. Man kauft
eine gewisse Anzahl Ellen von einem Stoff, die Elle zu 3 Bazen
eine andere . . . . . 4 . . .
noch eine andere . . . . . 5 . . .

Man hat für alles zusammen 29 Bazen bezahlt. Man fragt nach allen möglichen Arten, wie dieser Kauf hat geschehen können.

Ben.	Anzahl Ellen zu	3	Bazen . . .	x	Preis	3x
	. . . . .	4	. . .	y	. .	4y
	. . . . .	5	. . .	z	. .	5z

Bed. $3x+4y+5z=29$.

Red. In dieser Gleichung hat z den grösten Coefficienten, und der gröste Werth von z ist 5; mithin kann man für den Werth von z die sechs Vorausezungen machen, er sey 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Werthe von z: 1°. $z=0$; $3x+4y=29$; $x=7,\ 3$ / $y=2,\ 5$

2°. $z=1$; $3x+4y=24$; $x=8,\ 4,0$ / $y=0,\ 3,6$

3°. $z=2$; $3x+4y=19$; $x=5,\ 1$ / $x=1,\ 4$

4°. $z=3$; $3x+4y=14$; $x=2$ / $y=3$

5°. $z=4$; $3x+4y=9$; $\begin{matrix}x=3\\y=0\end{matrix}$

6°. $z=5$; $3x+4y=4$; $\begin{matrix}x=0\\y=1\end{matrix}$

Darstellung aller Auflösungen

x	y	z	
7	2	0	Auflösungen, in welchen keiner der Wer-
3	5	0	the der unbekannten Größen Null ist.
8	0	1	
4	3	1	
0	6	1	
7	1	2	
3	4	2	
2	2	3	
3	0	4	
0	1	5	

x	y	z	
4	3	1	12+12+ 5=29
5	1	2	15+ 4+10=29
1	4	2	3+16+10=29
2	2	3	6+ 8+15=29

Hätte man die Gleichung $3x+4y-5z=29$, so hätte man für die Werthe von z keine Gränze, und mithin wäre die Anzahl der Auflösungen auch unbegränzt.

Beyspiel. Sey $z=1$; $3x+4y=34$.

Man findet $x=10-4e$

$y=3e+1$

$x=10, 6, 2$

$y=1, 4, 7$

Zweytes Beyspiel. Es sey die Gleichung $4x+5y+9z=67$. Mögliche Werthe von z .. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

1°. $z=0$; $4x+5y=67$; $\begin{matrix}x=13, 8, 3\\y=3, 7, 11\end{matrix}$

2°. $z=1$; $4x+5y=58$; $\begin{matrix}x=12, 7, 2\\y=2, 6, 10\end{matrix}$

3°. $z=2$; $4x+5y=49$; $\begin{matrix}x=11, 6, 1\\y=1, 5, 9\end{matrix}$

4°. $z=3$; $4x+5y=40$; $x=10,\ 5,\ 0$ $y=0,\ 4,\ 8$

5°. $z=4$; $4x+5y=31$; $x=4$ $y=3$

6°. $z=5$; $4x+5y=22$; $x=3$ $y=2$

7°. $z=6$; $4x+5y=13$; $x=2$ $y=1$

8°. $z=7$; $4x+5y=4$; $x=1$ $y=0$.

§. 134.

Ich komme auf die Auflösung von Gleichungen, welche das Produkt zweyer unbekannten Größen enthalten, und will das Verfahren, durch welches man dieselbe auflöst, durch einige Beyspiele einleiten.

Erste Aufgabe. Die Seite eines Quadrats ist in einer ganzen Zahl gegeben; man soll die Seiten eines Rechteks, das so beschaffen ist, daß ihre Flächen sich verhalten wie ihre Umfänge, in ganzen Zahlen finden.

Es sey a die gegebene Seite des Quadrats, x und y die Seiten des gesuchten Rechteks: so hat man die Gleichung

$$xy:aa=x+y:2a$$

daher $2xy=a(x+y)$

$$x(2y-a)=ay,\ x=\frac{ay}{2y-a}$$

Erster Fall. Es sey a eine gerade Zahl 2b; so ist

$$x=\frac{2by}{2y-2b}=\frac{by}{y-b}=\frac{by-bb}{y-b}+\frac{bb}{y-b}=b+\frac{bb}{y-b}$$

Damit x eine ganze Zahl sey, muß $y-b$ ein Theiler von bb seyn.

Beyspiel. Sey $a=6$, $b=3$.

$y - b = 9, 3, 1$
$y = 12, 6, 4$
$\frac{bb}{y-b} = 1, 3, 9$
$x = 4, 6, 12.$

Dieſe Werthe reduciren ſich auf $x = 4$
$y = 12.$

Zweyter Fall. Es ſey a eine ungerade Zahl;

da $x = \frac{ay}{2y-a}$, $2x = \frac{2ay}{2y-a} = \frac{2ay-aa}{2y-a} + \frac{aa}{2y-a} = a + \frac{aa}{2y-a}$

ſo muß, damit 2x eine ganze Zahl ſey, $2y - a$ ein Theiler von aa ſeyn; und da a eine ungerade Zahl iſt, ſo ſind ihre Theiler auch ungerade; und die Summe dieſer Theiler und der ungeraden Zahl a iſt eine gerade Zahl; und folglich iſt x eine ganze Zahl.

Beyſpiel. Sey $a = 25$.

$2y - a = 1, 5, 25$
$2y = 6, 10, 30$; $y = 3, 5, 15$
$\frac{aa}{2y-a} = 25, 5, 1$; $x = 15, 5, 3$.

Dieſe Auflöſungen reduciren ſich auf $x = 15$
$x = 3$.

Zweyte Aufgabe. Die Seite eines Würfels iſt in ganzen Zahlen gegeben; die Abmeſſungen eines rechtwinklichen Parallelepipedums beſtimmen, das ein Quadrat zur Grundfläche habe und ſo beſchaffen ſey, daß ihre Körper ſich wie ihre Oberflächen verhalten.

Gegebene Seite des Würfels	a
Seite der Grundfläche des Parallelepipedums	x
Höhe deſſelben	y
Körperlicher Innhalt des Parallelepipedums	xxy
Oberfläche deſſelben	$2xx + 4xy$

Bed. $a^3 : xxy = 6aa : 2xx + 4xy$
$3xxy = a(xx + 2xy)$
$3xy = a(x + 2y)$

$$x(3y-a)=2ay$$

$$x=\frac{2ay}{3y-a}.$$

Erster Fall. Es sey a durch 3 theilbar, oder 3b.

$$x=\frac{6by}{3y-3b}=\frac{2by}{y-b}=\frac{2by-2bb}{y-b}+\frac{2bb}{y-b}=2b+\frac{2bb}{y-b}$$

Damit x eine ganze Zahl sey, muß $y-b$ im Theiler von $2bb$ seyn.

Beyspiel. Sey $a=6$

mithin $b=2$

$2bb=8$

$y-b=1, 2, 4, 8$

$y=3, 4, 6, 10$

$\frac{2bb}{y-b}=8, 4, 2, 1$

$x=12, 8, 6, 5.$

Zweyter Fall. Es sey a nicht durch 3 theilbar.

$$3x=\frac{6ay}{3y-a}=\frac{6ay-2aa}{3y-a}+\frac{2aa}{3y-a}=2a+\frac{2aa}{3y-a}$$

Damit 3x eine ganze Zahl sey, so muß $3y-a$ ein Theiler von $2aa$ seyn.

Beyspiel. Sey $a=5$

$2aa=50$

$3y-a=3y-5=1, 2, 5, 10, 25, 50$

$3y=6, 7, 10, 15, 30, 55$

$y=2, 5, 10.$

$\frac{2aa}{3y-a}=50, 5, 2$

$3x=60, 15, 12$

$x=20, 5, 4.$

Andere Beyspiele. Es ist ein Würfel, und eine der Seitenlinien eines rechtwinklichen Parallelepipedums gegeben, beydes in ganzen Zahlen. Die andern Seitenlinien in ganzen Zahlen bestimmen, so daß ihre Oberflächen sich wie ihre Körper verhalten.

Der Halbmesser einer Kugel ist in einer ganzen Zahl gegeben. Man soll ganze Ausdrücke für die Abmessungen eines Cylinders finden, so daß ihre Oberflächen sich wie ihre Körper verhalten.

Ein Rechtek finden, dessen Oberfläche eine gegebene Anzahl von Quadratfussen mehr enthält, als sein Umfang Fusse in Längenmaas.

Dritte Aufgabe. Alle Arten finden, den Raum um einen gegebenen Punkt in einer Ebene blos mit Winkeln regulärer Figuren auszufüllen.

Es ist bekannt, daß ein Winkel einer regulären Figur gleich ist zweyen rechten, weniger vier rechte Winkel durch die Anzahl ihrer Seiten dividirt, und daß die Summe der Winkel um einen Punkt auf einer Ebene vier rechten Winkeln gleich ist.

Es ist ferner bekannt, daß es nur drey Arten gibt, den Raum um einen Punkt auf einer Ebene durch Winkel regulärer Figuren von einerley Art auszufüllen: nämlich durch sechs Winkel gleichseitiger Dreyeke, durch vier Winkel von Quadraten, und durch drey Winkel regulärer Sechseke. Aber man kann diesen Raum durch Winkel verschiedener regulärer Sechseke ausfüllen, und man bestimmt die verschiedenen Arten, wie dies geschehen kann, auf folgende Weise:

Man gebrauche vier Winkel vom gleichseitigen Dreyek. Die Summe dieser vier Winkel ist $2\frac{2}{3}$ rechten Winkeln gleich; und es bleibt ein Rechter und ein Drittel übrig, welches soviel beträgt, als ein Winkel des regulären Sechseks.

Man gebrauche drey Winkel des gleichseitigen Dreyeks; so bleiben noch zwey rechte Winkel auszufüllen übrig, welches durch zwey Winkel des Quadrats geschehen kann.

Man gebrauche zwey Winkel eines gleichseitigen Dreyeks. So bleiben zwey rechte Winkel und zwey Drittel auszufüllen übrig: welches nur durch zwey Winkel regulärer

Figuren von einer Anzahl Seiten, die größer ist als drey, geschehen kann.

Es seyen m und n die Anzahlen der Seiten der hiezu dienlichen Figuren; die Werthe ihrer Winkel sind $2-\frac{4}{m}$ und $2-\frac{4}{n}$ (rechte); folglich ist ihre Summe $4-\frac{4}{m}-\frac{4}{n}$

Bed. $4-\frac{4}{m}-\frac{4}{n}=2\frac{2}{3}=\frac{8}{3}=4-\frac{4}{3}$.

Red. $\frac{4}{m}+\frac{4}{n}=\frac{4}{3}$

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{3}$

$3m+3n=mn$; $m=\frac{3n}{n-3}=\frac{3n-9}{n-3}+\frac{9}{n-3}=3+\frac{9}{n-3}$

$n-3=1, 3, 9$

$n=4, 6, 12$

$\frac{9}{n-3}=9, 3, 1$

$m=12, 6, 4$.

Man kann also, wenn man zwey Winkel des gleichseitigen Dreyeks gebraucht hat, den übrigen Raum entweder mit zwey Winkeln des Sechseks, oder mit einem Winkel des Quadrats und einem Winkel des Zwölfeks ausfüllen.

Hat man nur einen einzigen Winkel des gleichseitigen Dreyeks gebraucht, so bleiben noch drey rechte Winkel und ein Drittel auszufüllen übrig. Man kann diesen Raum entweder mit zweyen Winkeln von Figuren von einer größern Anzahl Seiten als drey, oder mit drey dergleichen auszufüllen suchen.

1°. Dieser Raum sey nur mit zwey Winkeln von Figuren von einer größern Anzahl Seiten als drey ausgefüllt.

Man hat die Bedingung $4-\frac{4}{m}-\frac{4}{n}=4-\frac{2}{3}$

$\frac{4}{m}+\frac{4}{n}=\frac{2}{3}$

$6n+6m=mn$

$m(n-6)=6n$

$$m = \frac{6n}{n-6} = \frac{6n-36}{n-6} + \frac{36}{n-6} = 6 + \frac{36}{n-6}$$

$n-6 = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$

$n = 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 42$

$\frac{36}{n-6} = 36, 18, 12, 9, 6, 4, 3, 2, 1$

$m = 42, 24, 18, 15, 12, 10, 9, 8, 7$

Es gibt demnach fünf Arten, den Raum auszufüllen, der übrig bleibt, wenn man einen Winkel des gleichseitigen Dreyeks gebraucht hat; indem man nämlich zwey Figuren gebraucht, deren SeitenAnzahlen sind

7, 8, 9, 10, 12

42, 24, 18, 15, 12

2°. Der übrige Raum sey mit drey Winkeln regulärer Figuren ausgefüllt. Da drey Winkel des Fünfeks $3\frac{3}{5}$ rechte ausmachen, welches mehr ist als $3\frac{1}{3}$ rechte; so muß einer dieser Winkel der des Quadrats seyn, und es bleiben alsdenn noch $2\frac{1}{3}$ Winkel auszufüllen übrig.

Man hat daher die Gleichung $4 - \frac{4}{m} - \frac{4}{n} = 2\frac{1}{3}$

$$\frac{4}{m} + \frac{4}{n} = 1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$12m + 12n = 5mn$$

$$m(5n - 12) = 12n$$

$$m = \frac{12n}{5n-12}$$

$$5m = \frac{60n}{5n-12} = \frac{60n-144}{5n-12} + \frac{144}{5n-12} = 12 + \frac{144}{5n-12}$$

$5n - 12 = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144$

$5n = 13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 36, 48, 60, 84, 156$

	=	15,	20,	30,	60
n	=	3,	4,	6,	12
m	=	12,	6,	4,	3.

Man hat demnach $n = 3, 4$

$m = 12, 6$

Man findet hieraus, in dem man die ersten Werthe, als durch die Vorausſezung, daß man nur einen einzigen

Winkel des gleichseitigen Dreyeks gebrauche, ausgeschlossen übergeht: daß man den Raum um einen Punkt herum mit einem Winkel des gleichseitigen Dreyeks, zweyen Winkeln des Quadrats und einem Winkel des Sechseks ausfüllen kann.

Nach Aufzählung der Fälle, da man einen Winkel des gleichseitigen Dreyeks gebraucht hat, komme ich auf die Aufzählung derjenigen, da man blos Figuren von einer grösern Anzahl Seiten gebraucht.

Da beym Gebrauch zweyer oder dreyer Winkel des Quadrats keine neue Fälle Statt finden, so gehe ich auf die Voraussezung über, daß man einen einzigen Winkel des Quadrats gebrauche. Der übrige Raum wird sich sodenn mit zwey Winkeln von einer grösern Anzahl Seiten als vier ausfüllen lassen. Nennt man die Anzahlen dieser Seiten m und n, so hat man die Gleichung $4 - \frac{4}{m} - \frac{4}{n} = 3$

$$\frac{4}{m} + \frac{4}{n} = 1;\ 4m + 4n = mn$$

$$m(n-4) = 4n;\ m = \frac{4n}{n-4} = \frac{4n-16}{n-4} + \frac{16}{n-4} = 4 + \frac{16}{n-4}$$

$$n - 4 = 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16$$

$$\frac{16}{n-4} = 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1$$

$$n = 5,\ 6,\ 8,\ 12,\ 20$$

$$m = 20,\ 12,\ 8,\ 6,\ 5.$$

Man kann demnach, wenn man einen Winkel des Quadrats gebraucht, den übrigen Raum auf dreyerley Arten ausfüllen, nämlich mit Winkeln von Figuren, deren Seiten-Anzahlen sind $\begin{matrix} 5, & 6 & 8 \\ 20, & 12 & 8 \end{matrix}$.

Man habe einen Winkel des Fünfeks gebraucht, welcher $1\frac{1}{5}$ eines Rechten beträgt. So blieben noch $2\frac{4}{5}$ rechte Winkel auszufüllen übrig.

Bed. $4 - \frac{4}{m} - \frac{4}{n} = 2\frac{4}{5}$

$$1\frac{1}{5} = \frac{4}{m} + \frac{4}{n}$$

$$\frac{6}{5} = \frac{4m + 4n}{mn}$$

$$3mn = 10m + 10n$$

$$m(3n - 10) = 10n$$

$$m = \frac{10n}{3n-10}$$

$$3m = \frac{30n}{3n-10} = \frac{30n-100}{3n-10} + \frac{100}{3n-10} = 10 + \frac{100}{3n-10}$$

$3n - 10$	=	1,	2,	4,	5,	10,	20,	25,	50, 100
$3n$	=	11,	12,	14,	15,	20,	30,	35,	60, 110
	=		12,		15,		30,		60
n	=		4,		5,		10,		20
$\frac{100}{3n-10}$	=		50,		20,		5,		2
$3m$	=		60,		30,		15,		12
m	=		20,		10,		5,		4

Diese Auflösungen reduciren sich auf $m = 20, 10$
$n = 4, 5$

Die erste Auflösung $\begin{matrix} m = 20 \\ n = 4 \end{matrix}$ ist in den vorhergehenden Fällen begriffen. Es bleibt also übrig $\begin{matrix} m = 10 \\ n = 5 \end{matrix}$. Man kann demnach den Raum um einen Punkt herum mit zwey Winkeln des Fünfeks und einem Winkel des Zeheneks ausfüllen.

Ich habe diese Anwendung als ein Beyspiel einer vollständigen Aufzählung entwikelt. Ich will mich nicht damit aufhalten, die jedem Fall entsprechenden Figuren zu zeichnen, noch auch diejenigen der gefundenen Anordnungen zu unterscheiden, welche verlängert und auf den Gartenbau oder sonst zu einem bürgerlichen Gebrauch angewendet werden können.

Zu §. 131.

Es gibt noch einige andere Arten, die Aufgabe dieses §. zu behandeln, welche wir an einem Beyspiel zeigen, sodenn noch etwas über den Fall beyfügen wollen, wenn die gegebenen Divisoren nicht Primzahlen zu einander sind.

Aufgabe. Eine Zahl finden, welche sich durch 11 ohne Rest theilen läßt; durch 13, 15, 17, 19 getheilt die respectiven Reste +15, —1, +3, —20 läßt.

Es wird dienlich seyn, hier zu bemerken, daß man, ohne die Aufgabe zu verändern, die Reste, welche gegebenen Divisoren zugehören, auf verschiedene Arten ausdrucken kan. Eine Zahl, die durch 19 dividirt, —20 zum Rest läßt, läßt auch —1 zum Rest; auch +18; zuweilen kann man den Rest auch 19+18, 2.19+18, 3.19+18 u.s.w. sezen. Ueberhaupt kann man für den Ausdruk einer Zahl (N = mx + r), die durch m dividirt, r zum Reste läßt, in vorkommenden Fällen nach Gutdünken eine von folgenden Formen wählen:

$$N = mx' + (m+r),\ = mx'' + (2m+r),\ \ldots\ = mX + (nm+r),$$
$$N = my' - (m-r),\ = my'' - (2m-r),\ \ldots\ = mY - (nm-r);$$

denn diese Ausdrücke sind, wie man sieht, mit dem ersten $mx+r$ identisch, wenn man $x' = x-1$, $x'' = x-2$, ... $X = x-n$; $y' = x+1$, $y'' = x+2$, ... $Y = x+n$ macht.

Erste Auflösung. Nach der §. 130. angegebenen Methode.

Vermöge der beyden ersten Bedingungen hat man die gesuchte Zahl

$$N = 11t = 13v + 15 \text{ oder } = 13v + 2.$$

Man löse die Gleichung $11t - 13v = 2$ nach §. 130. auf; man findet

$$t = 2.6 + 13m$$
$$v = 2.5 + 11m$$
$$N = 143m + 132 \text{ oder } = 143m - 11.$$

Hiezu die dritte Bedingung genommen, hat man

$$N = 143m - 11 = 15x - 1 \text{ oder } 15x - 16;$$

Man findet hieraus $m = -2.5 + 15m'$

$$x = -19.5 + 143m'$$

$$N = 2145m' - 144, \text{ oder} = 2145m' + 704.$$

Vermöge der vierten Bedingung soll aber auch $N = 17y + 3$ seyn. Man hat demnach

$$N = 2145m' + 704 = 17y + 3 = 17(y' + 41) + 3 = 17y' + 700$$

$$2145m' - 17y' = -4.$$

Diese Gleichung aufgelöst, gibt

$$m' = -6.4 + 17m''$$

$$y' = -75.7 + 2145m''$$

$$N = 36465m'' - 50776, \text{ oder} = 36465m'' - 14311.$$

Vermöge der fünften Bedingung muß endlich $N = 19z - 20$ seyn. Demnach hat man

$$36465m'' - 14311 = 19z - 20 = 19(z' - 753) - 20$$

$$= 19z' - 14327$$

mithin $36465m'' - 19z' = -16$

Man findet $m'' = -5.16 + 19m'''$

$$z' = -9596.16 + 36465m''';$$

daher $N = 692835m''' - 2931511$

$$= 692835(m''' - 4) - 160171$$

$$= 692835(m''' - 5) + 532664.$$

Mithin ist 532664 die kleinste positive Zahl, welche der Aufgabe Genüge leistet, und der allgemeine Ausdruk der gesuchten Zahl ist 692835 (d. i. 11. 13. 15. 17. 19) × e + 532664, wo e jede ganze Zahl seyn kann.

Zweyte Auflösung. Die gesuchte Zahl muß vermöge der fünf angegebenen Bedingungen in jeder der fünf Formen

$$11t,\ 13v + 15,\ 15x - 1,\ 17y + 3,\ 19z - 20$$

begriffen seyn. Man bestimme zuerst (nach §. 130) die Formen, welche t haben muß, damit die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 11t &= 13v + 15 \\ &= 15x - 1 \\ &= 17y + 3 \\ &= 19z - 20 \end{aligned}\right\}$$

in ganzen Zahlen bestehen können; man findet

$$\left.\begin{aligned} t &= 13v' - 1 \\ &= 15x' + 4 \\ &= 17y' + 8 \\ &= 19z' - 7 \end{aligned}\right\}$$

jeder der Ausdrücke $13v' - 1, \ldots 19z' - 7$, wird nämlich in dem Ausdruk $11t$ statt t gesezt eine durch 11 theilbare Zahl, und namentlich wird der erste $13v' - 1$ eine solche geben, die durch 13 dividirt, 15 zum Rest läßt.

Man bestimme weiter v' so, daß die Gleichungen

$$13v' - 1 = 15x' + 4, \text{ oder } 13v' = 15x' + 5$$
$$= 17y' + 8 \qquad = 17y' + 9$$
$$= 19z' - 7 \qquad = 19z' - 6$$

in ganzen Zahlen bestehen. Man findet

$$\left.\begin{aligned} v' &= 15x'' + 5 \\ &= 17y'' + 2 \\ &= 19z'' + 1 \end{aligned}\right\}$$

Jeder der Werthe $15x'' + 5$, u. s. w. nämlich, in dem Ausdruk $11t$ d. i. $11(13v' - 1)$ statt v' substituirt, wird den Ausdruk einer Zahl geben, die durch 11 theilbar ist, durch 13 getheilt 15 zum Rest läßt; namentlich wird der erste dieser Werthe substituirt, den Ausdruk $11(13.15x'' + 13.5 - 1)$ für eine Zahl geben, die ausser den ebengenannten Eigenschaften noch diese hat, durch 15 getheilt den Rest -1 zu lassen.

Löst man ferner die Gleichungen:

$$15x'' + 5 = 17y'' + 2, \text{ oder } 15x''' = 17y'' - 3$$
$$= 19z'' + 1 \qquad = 19z'' - 4$$

für ganze Zahlen auf, wodurch man

$$x'' = 17y''' - 3$$
$$= 19z''' - 4 \text{ findet;}$$

so wird der Werth $17y''' - 3$ statt x'' im Ausdruk $11(13.15x'' + 13.5 - 1)$ substituirt, den Ausdruk einer Zahl geben, die durch 11 ohne Rest theilbar ist, durch 13, 15, 17 getheilt, die respectiven Reste 15, -1, $+3$ läßt; dieser Ausdruk ist $11(13.15.17y''' - 3.13.15 + 5.13 - 1)$. Der andere Werth $19z''' - 4$ statt x'' substituirt, wird eine Zahl ausdrücken, die durch 11 ohne Rest theilbar ist, durch 13, 15, 19 getheilt die respectiven Reste 15, -1, -20 läßt.

Findet man endlich noch für die Auflösung der Gleichung $17y''' = 3 = 19z''' - 4$, oder $19z''' - 17y''' = 1$ in ganzen Zahlen, für y''' die Bestimmung:

$y''' = 19z^{IV} - 4$, wo z^{IV}, jede ganze Zahl seyn kann; so erhält man durch Substitution dieses Werths von y''' den Ausdruk

$$11(13.15.17.19z^{IV} - 4.13.15.17 - 3.13.15 + 5.13 - 1)$$
$$= 11.13.15.17.19z^{IV} - 160171, \text{ wie oben,}$$

für die verlangte Zahl.

Dritte Auflösung. Das einfachste Verfahren im allgemeinen ist wohl folgendes, welches wie übrigens sogleich in Anwendung auf das vorgegebene Beyspiel vortragen wollen:

Man suche die kleinsten Zahlen

N', welche durch 11, 15, 17, 19 ohne Rest theilbar ist, durch 13 getheilt den Rest $+15$ läßt
N'', ... 11, 13, 17, 19 ohne Rest theilbar ist, durch 15 getheilt den Rest -1 läßt
N''', ... 11, 13, 15, 19 ohne Rest theilbar ist, durch 17 getheilt den Rest $+3$ läßt
N^{IV}, ... 11, 13, 15, 17, ohne Rest theilbar ist, durch 13 getheilt den Rest -20 läßt;

ihre Summe wird eine Zahl seyn, die durch 11 ohne Rest theilbar ist, und

	durch	13,	15,	17,	19 dividirt
die respectiven Reste		$+15$,	-1,	$+3$,	-20 läßt;

Und der allgemeine Ausdruk einer solchen Zahl wird seyn $N = N' + N'' + N''' + N'' + 11.13.15.17.19e$, wo e irgend eine ganze Zahl seyn kann.

Denn erstlich, da die Zahlen N', N'', N''', N'' jede für sich durch 11 ohne Rest theilbar sind, so ist auch ihre Summe durch 11 ohne Rest theilbar. Und da N' durch 13 dividirt den Rest 15 läßt, N'' aber sich ohne Rest durch 13 dividiren läßt; so wird auch $N' + N''$ durch 13 dividirt den Rest 15 lassen. Ebenso wird gezeigt, daß $N' + N''$ durch 15 dividirt den Rest -1 lasse. Und da sowohl N' als N'' durch 17 und 19 ohne Rest theilbar ist, so ist es auch ihre Summe. Mithin ist $N' + N''$ eine Zahl, die durch 17 und 19 ohne Rest theilbar ist, und durch 13, 15 dividirt die Reste $+15$, -1 läßt. Auf ähnliche Art wird sodenn fortgeschlossen, daß $N' + N'' + N'''$ eine Zahl sey, die durch 19 sich ohne Rest dividiren läßt, durch 13, 15, 17 dividirt aber die respectiven Reste $+15$, -1, $+3$ läßt. Nun ist N'' eine Zahl, die durch 13, 15, 17 ohne Rest theilbar ist, durch 19 dividirt aber den Rest -20 läßt. Folglich wird $N' + N'' + N''' + N''$ eine Zahl seyn, welche durch 13, 15, 17, 19 dividirt die respectiven Reste $+15$, -1, $+3$, -20 läßt. Sie ist aber auch durch 11 theilbar. Folglich hat diese Zahl die verlangten Eigenschaften. Und die Summe dieser Zahl und irgend eines gemeinschaftlichen Vielfachen der Zahlen 11, 13, 15, 17, 19 wird ebenfalls die erwähnten Eigenschaften haben.

Diese Methode reducirt die Auflösung der Aufgabe, wovon wir handeln, auf sovielmalige Anwendung der einfachen Aufgabe (§. 130.), als man gegebene Divisoren hat, welche Reste lassen. Man hat nämlich

$N' = 11.15.17.19$ $X' = 13Y' + 15$
$N'' = 11.13.17.19$ $X'' = 15Y'' - 1$
$N''' = 11.13.15.19$ $X''' = 17Y''' + 3$
$N'' = 11.13.15.17$ $X'' = 19Y - 20.$

Nun kann man bemerken, daß rmal eine Zahl, welche durch eine gegebene dividirt den Rest 1 läßt, durch dieselbe gege-

bene dividirt den Rest r lassen wird; und daß, wenn man Werthe x, y kennt, welche für gegebene a, b die Gleichung $ax - by = \pm 1$ in ganzen Zahlen auflösen, die Produkte derselben durch r Werthe von X, Y geben werden, welche für ein gegebenes r die Gleichung $aX - bY = \pm r$ in ganzen Zahlen auflösen.

Dis vorausgesezt, löse man im vorliegenden Fall die Gleichungen auf:

$$11 \times 15 \times 17 \times 19x' - 13y' = 1$$
$$11 \times 13 \times 17 \times 19x'' - 15y'' = 1$$
$$11 \times 13 \times 15 \times 19x''' - 17y''' = 1$$
$$11 \times 13 \times 15 \times 17x^{IV} - 19y^{IV} = 1;$$

man findet in den kleinsten Werthen $x' = 5$, $x'' = 4$, $x''' = 3$, $x^{IV} = 5$; und hieraus

$X' = 15x' = +5 \cdot 15$; $X'' = -1 \cdot 4$, $X''' = +3 \cdot 3$, $X^{IV} = -5 \cdot 20$.

Daher
$$N' = +5 \cdot 15 \times 11 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 = +3997125$$
$$N'' = -1 \cdot 4 \times 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = -184756$$
$$N''' = +3 \cdot 3 \times 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 19 = +366795$$
$$N^{IV} = -5 \cdot 20 \times 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 = -3646500$$

$$N' + N'' + N''' + N^{IV} = +532664$$

$$N = 692835e + 532664.$$

Man sieht, daß die zusammengesezte Aufgabe: eine Zahl zu finden, die durch gegebene Zahlen dividirt gegebene Reste läßt, wenn die gegebenen Divisoren Primzahlen zu einander sind, die Reste mögen beschaffen seyn wie sie wollen, so wie die einfache in §. 130, immer auflöslich, und zwar eine unbegrenzte Anzahl von Auflösungen derselben möglich ist.

Wir gehen zu dem Fall über, da die gegebenen Divisoren nicht Primzahlen zu einander sind. Hier muß zuvörderst bemerkt werden, daß, wenn die Aufgabe nichts unmögliches enthalten soll, die gegebenen Reste so beschaffen seyn müssen, daß das gröste gemeinschaftliche Maas je zweyer

der gegebenen Divisoren auch den Unterschied der gegebenen ihnen correspondirenden Reste messe.

Denn es seyen a, a' zwey Zahlen, durch welche eine Zahl N dividirt die Reste r, r' lasse. So hat man N = ax + r = a'y + r'; mithin ax — a'y = r' — r. Wenn nun a, a' nicht Primzahlen zu einander sind, so muß ihr grösstes gemeinschaftliches Maas auch den Unterschied der Reste r, r' messen.

Das in diesem Fall zu befolgende Verfahren zu zeigen, diene folgende

Aufgabe. Eine Zahl finden, die durch die gegebene
18, 20, 24, 30 dividirt die respectiven Reste
5, 9, 17, 29 lasse.

Die gegebenen Reste haben hier die erforderliche Eigenschaft. Nämlich 2, das gemeinschaftliche Maas von 18 und 20, mißt auch die Differenz der ihnen correspondirenden Reste 9 — 5 = 4; 6, das gemeinschaftliche Maas von 18 und 24, mißt auch 17 — 5 = 12; und so weiter.

Bed. N = 18v + 5 = 20x + 9 = 24y + 17 = 30z + 29.

Red. Man nehme das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Divisoren, 720; und zerlege dasselbe in Factoren, welche Primzahlen zu einander sind und die gegebenen Divisoren ohne Rest dividiren. Diese Factoren sind 9, 5, 8: nämlich 9 dividirt die Zahl 18, 5 die Zahlen 20 und 30, 8 die Zahl 24. Man suche sodenn vermöge des vorigen Falls der Aufgabe eine Zahl, welche für die genannten Factoren 9, 5, 8
die Reste 5, 9 oder 29, 17 lasse,
nämlich beziehungsweise die nämlichen gegebenen, welche vermöge der Bedingung den durch die genannten Factoren beziehungsweise theilbaren gegebenen Divisoren correspondiren. Oder man suche nach vorher vermöge obiger Anmerkung vorgenommener Reduction der Reste (nach welcher man statt des Rests 9 oder 29 für den Divisor 5 als Rest 4, statt 17 für 8 den Rest 1 sezen kan) eine Zahl

$$N = 9V + 5 = 5X + 4 = 8Y + 1,$$

ich behaupte, daß diese Zahl der Aufgabe Genüge leistet.

Denn fürs erste hat man, $V = V'$, $X = X' + 1$, $Y = Y' + 2$, $X = Z' + 5$ gesezt;

$$N = 9V' + 5 = 5X' + 9 = 8Y' + 17 = 5Z' + 29.$$

Hieraus ergibt sich $9V' - 8Y' = 17 - 5 = 12$,
Wo sowohl $8Y'$, als 12 durch 2 theilbar ist, folglich muß auch V' durch 2 theilbar seyn. Es sey $V' = 2v$.
Ferner $5X' - 8Y' = 17 - 9 = 8$;
Woraus man ebenfalls schließt, daß X' durch 4 theilbar sey. Es sey $= 4x$.
Ferner hat man $9V' - 8Y' = 17 - 5 = 12$,
daher Y' durch 3 theilbar seyn muß. Es sey $= 3y$.
Endlich hat man $8Y' - 5Z' = 29 - 17 = 12$
$9V' - 5Z' = 29 - 5 = 24$;
daher Z' sowohl durch 2 als durch 3, mithin durch 6 theilbar ist. Es sey $= 6z$.

So ist $N = 18v + 5 = 20x + 9 = 24y + 17 = 30x + 29$, mithin N eine Zahl, welche den vorgegebenen Bedingungen Genüge thut.

Anmerkung. Man sieht, daß eine der gegebenen Bedingungen $N = 20x + 9$, $N = 30x + 29$ überflüssig war; und so ereignet sich oft der Fall, daß einige der angegebenen Bedingungen in den andern enthalten sind, wenn die Divisoren nicht Primzahlen unter einander sind. Ebenso würden zum Beyspiel im lezten Fall, wenn die Forderungen hinzugesezt würden, daß die verlangte Zahl durch 15 dividirt den Rest 14, durch 36 dividirt den Rest 5, durch 40 dividirt den Rest 9 lassen sollte, dadurch keine weitere Bestimmungen der verlangten Zahl gegeben seyn, welche nicht schon in den vorhergehenden enthalten wären.

Achtes Kapitel.

Ueber die figurirten Zahlen.

Wir haben (§. 114.) gesehen, daß der Ausdruk der Summe der n ersten natürlichen Zahlen oder der nten Triangularzahl $\frac{n(n+1)}{1.2}$ ist. Man hat auch den Ausdruk der Summe einer gegebenen Menge von Triangularzahlen gesucht.

Um den bey dieser Untersuchung zu befolgenden Weg einzuleiten, will ich vermittelst desselben die Summe der natürlichen Zahlen bestimmen, unabhängig von der Fundamentaleigenschaft der arithmetischen Progressionen, daß die Summen ihrer äussersten und je zweyer von den äussersten gleich weit entfernter Glieder beständig sind.

§. 135.

Es sey $S' = 1+2+3+4+5+6+\ldots\ldots+n$.

Man hat $1 = 1$

$2 = 1+1$

$3 = 1+1+1$

$4 = 1+1+1+1$

$5 = 1+1+1+1+1$

$6 = 1+1+1+1+1+1$

$\vdots$

$n = 1+1+1+1+1+1+\ldots\ldots+1$

Daher $S' = 1(n)+1(n-1)+1(n-2)+1(n-3)$
$+1(n-4)+\ldots\ldots+1(n-(n-1))$
$= n(1+1+1+1+1+\ldots\ldots+1)$
$-(1+2+3+4+\ldots\ldots+(n-1))$
$= n\times n-(S'-n) = n(n+1)-S'$.

Mithin $2S' = n(n+1)$; $S' = \frac{n(n+1)}{1.2}$, dem §. 114. gemäß.

§. 136.

Untersuchung der Summe der Triangularzahlen.

Es sey $S'' = 1+3+6+10+15+21+\ldots+\frac{n(n+1)}{1.2}$

Man zerlege jede Triangularzahl in die natürlichen Zahlen, deren Summe sie ist; man erhält

$$1 = 1$$
$$3 = 1+2$$
$$6 = 1+2+3$$
$$10 = 1+2+3+4$$
$$15 = 1+2+3+4+5$$
$$21 = 1+2+3+4+5+6$$

$$\vdots$$

$$\frac{n(n+1)}{1.2} = 1+2+3+4+5+6+\ldots\ldots+n$$

$$S'' = 1\times n+2(n-1)+3(n-2)+4(n-3)+5(n-4)+\ldots\ldots+n(n-(n-1))$$
$$= n(1+2+3+4+5+6+\ldots\ldots+n)$$
$$-(1.2+2.3+3.4+4.5+5.6+\ldots+(n-1)n)$$

Die Reyhe, welche der Coefficient von n im ersten Theile des Ausdruks ist, in welchen S'' zerlegt worden, ist die Summe der n ersten natürlichen Zahlen, oder die nte Triangularzahl, deren Ausdruk ist $\frac{n(n+1)}{1.2}$.

Der zweyte von dem ersten abzuziehende Theil besteht aus den doppelten Triangularzahlen von der ersten an bis zur $(n-1)$ten; der Ausdruk dieses zweyten Theils ist mithin $2(S''-\frac{n(n+1)}{1.2})$. Man hat folglich die Gleichung

$$S'' = n\frac{n(n+1)}{1.2} - 2\left(S''-\frac{n(n+1)}{1.2}\right) = \frac{n(n+1)}{1.2}(n+2) - 2S''$$

Daher $3S'' = \frac{n(n+1)}{1.2}(n+2)$

und $S'' = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$.

Erklärung. Die Summen der Triangularzahlen heissen **Pyramidalzahlen.** Der Ursprung dieser Benennung ist folgender: Man denke sich auf einem gleichseitigen Dreyek als Grundfläche eine Pyramide, deren Seitenflächen auch gleichseitige Dreyeke seyen, oder ein reguläres Tetraeder. Auf der genannten Grundfläche seyen Punkte in Triangelform gereyht; und diese Punkte seyen die Mittelpunkte gleicher Kugeln, deren Halbmesser dem halben Abstand zweyer benachbarten Punkte gleich sey (vermöge dieser Anordnung berührt jede Kugel, ausgenommen diejenige, deren Mittelpunkte sich auf den Seiten des Dreyeks befinden, sechs um sie herum liegende Kugeln.) Auf diese Lage von Kugeln sey eine zweyte von Kugeln, die den ersten gleich seyen, gestellt; so daß jede von diesen leztern auf dem Zwischenraum dreyer aneinander liegenden und die Spizen eines gleichseitigen Dreyeks einnehmenden Kugeln der ersten Lage zu stehen komme; und daß folglich vier an einander liegende Kugeln, wovon drey zur ersten Lage, die vierte zur zweyten gehöre, die Spizen eines regulären Tetraeders einnehmen. Eben so sey eine dritte Lage auf die zweyte gestellt; sodenn eine vierte auf die dritte, und so fort, bis man auf eine einzige Kugel kommt, deren Mittelpunkt in der Spize des Tetraeders liegt. Die Zahlen der in jeder Lage befindlichen Kugeln wachsen von der Spize an gerechnet wie die Triangularzahlen; die Anzahl der in der Pyramide befindlichen Kugeln ist die Summe so vieler Triangularzahlen, als Kugeln auf einer der Seiten des Tetraeders liegen, oder die correspondirende Pyramidalzahl.

Die so eben beschriebene Anordnung ist eine von denjenigen, welche man in den Zeughäusern bey Anordnung der Kugeln und Bomben befolgt.

Die Pyramidalzahlen bilden demnach die Reyhe

$$1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

Da von drey auf einander folgenden natürlichen Zahlen eine gewiß durch drey, und zum wenigsten eine durch

zwey theilbar ist; so ist die vorhergehende Formel eine ganze Zahl, wie dis seyn muß.

§. 137.

Es sey S''' die Summe der Pyramidalzahlen, deren Anzahl n ist, so daß

$$S''' = 1+4+10+20+35+56+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

Man zerlege jede Pyramidalzahl in die Triangularzahlen, deren Summe sie ist. Man erhält

$$1 = 1$$
$$4 = 1+3$$
$$10 = 1+3+6$$
$$20 = 1+3+6+10$$
$$35 = 1+3+6+10+15$$
$$56 = 1+3+6+10+15+21$$

. . .

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} = 1+3+6+10+15+21+\ldots+\frac{n(n+1)}{1.2}$$

$$\text{daher } S''' = 1\times n+3(n-1)+6(n-2)+10(n-3)+15(n-4)$$
$$+21(n-5)+\ldots+\frac{n(n+1)}{1.2}(n-(n-1))$$
$$= n\left(1+3+6+10+15+21+\ldots+\frac{n(n+1)}{1.2}\right)$$
$$-\left(1.3+2.6+3.10+4.15+5.21+\ldots\right.$$
$$\left.+(n-1)\frac{n(n+1)}{1.2}\right)$$

Die Reyhe, welche der Cöfficient von n im ersten Theil ist, in welchen S''' zerlegt worden, ist die Reyhe der n ersten Triangularzahlen, deren Summe die nte Pyramidalzahl, oder $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$ ist.

Die davon abzuziehende Reyhe besteht aus den Dreyfachen der $n-1$ ersten Pyramidalzahlen; die Summe ihrer Glieder ist mithin $3\left(S''' - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\right)$. Man hat also die Gleichung

$$S''' = n \times \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} - 3\left(S'' - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}(n+3) - 3S''$$

Folglich $4S''' = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$

und $S''' = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$

Den so eben bestimmten Zahlen entspricht nicht, wie den Triangular- und Pyramidalzahlen, ein Schema in der Natur, wenigstens nicht in Absicht auf Anordnung der Punkte im Raum. Man hat sie figurirte Zahlen der vierten Ordnung genannt.

Nämlich die natürlichen Zahlen heissen figurirte Zahlen der ersten Ordnung.

Die Triangularzahlen, welche die Summen der natürlichen Zahlen sind, heissen figurirte Zahlen der zweyten Ordnung.

Die Pyramidalzahlen, welche die Summen der Triangularzahlen sind, heissen figurirte Zahlen der dritten Ordnug.

Die Zahlen, welche die Summen der Pyramidalzahlen oder der figurirten Zahlen der dritten Ordnung sind, heissen figurirte Zahlen der vierten Ordnung.

Die Summen der figurirten Zahlen der vierten Ordnung machen die figurirten Zahlen der fünften Ordnung aus.

Ebenso geht man zu den figurirten Zahlen der sechsten, siebenten, achten ... Ordnung fort; und im allgemeinen machen die Suumen der figurirten Zahlen der mten Ordnung die figurirten Zahlen der (m+1)ten Ordnung aus.

Die figurirten Zahlen der 4ten Ordnung sind demnach

$1, 5, 15, 35, 70, 126 .... \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$

§. 138.

Es sey S'' die Summe der figurirten Zahlen der vier-

ten Ordnung, oder der Ausdruk einer figurirten Zahl der fünften Ordnung; so daß

$$S^{IV} = 1+5+15+35+70+126+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$$

Man zerlege die figurirten Zahlen der vierten Ordnung in die figurirten Zahlen der dritten, deren Summen sie sind: man erhält

$$1 = 1$$
$$5 = 1+4$$
$$15 = 1+4+10$$
$$35 = 1+4+10+20$$
$$70 = 1+4+10+20+35$$
$$126 = 1+4+10+20+35+56$$
$$\vdots$$
$$\frac{n\ldots(n+3)}{1\ldots4} = 1+4+10+20+35+56+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

$$S^{IV} = 1\times n+4(n-1)+10(n-2)+20(n-3)+35(n-4)$$
$$+56(n-5)+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}(n-(n-1))$$
$$= n\left(1+4+10+20+35+56+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\right)$$
$$-\left(1.4+2.10+3.20+4.35+5.56+\ldots+(n-1)\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\right)$$

Die Reyhe, welche der Coefficient von n im ersten Theil ist, in welchen S^{IV} zerlegt worden, ist die Reyhe der n ersten Pyramidalzahlen, deren Summe die nte figurirte Zahl der vierten Ordnung oder $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$ ist.

Die von der ersten abzuziehende Reyhe besteht aus den vierfachen der n-1 ersten figurirten Zahlen der vierten Ordnung: die Summe ihrer Glieder ist daher $4\left(S^{IV}-\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}\right)$

$$S^{IV} = n\times\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}-4\left(S^{IV}-\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3,4}(n+4)-4S^{IV}$$

daher $5S^{IV} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}(n+4)$

und $S^{IV} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}$

Die figurirten Zahlen der fünften Ordnung sind mithin

1, 6, 21, 56, 126, 252, ... $\frac{n \ldots (n+4)}{1 \ldots 5}$.

§. 139.

Diese Beyspiele sind hinreichend, um die allgemeinen Ausdrücke der figurirten Zahlen aller Ordnungen nach einander durch Analogie zu schliessen.

Ordnungen

6te: 1, 7, 28, 84, 210, 462 . . . $\frac{n \ldots (n+5)}{1 \ldots 6}$

7te: 1, 8, 36, 120, 330, 792 . . . $\frac{n \ldots (n+6)}{1 \ldots 7}$

8te: 1, 9, 45, 165, 495, 1287 . . . $\frac{n \ldots (n+7)}{1 \ldots 8}$

. . . . . .

mte: $1, m+1, \frac{(m+1)(m+2)}{1.2}, \frac{(m+1)\ldots(m+3)}{1\ldots3}, \frac{(m+1)\ldots(m+4)}{1\ldots4}, \frac{(m+1)\ldots(m+5)}{1\ldots5} \ldots\ldots \frac{(m+1)\ldots(m+(n-1))}{1\ldots(n-1)}$

oder $\frac{1\ldots m}{1\ldots m}, \frac{2\ldots(m+1)}{1\ldots m}, \frac{3\ldots(m+2)}{1\ldots m}, \frac{4\ldots(m+3)}{1\ldots m}, \frac{5\ldots(m+4)}{1\ldots m}, \frac{6.\ (m+5)}{1\ldots m}, \ldots\ldots \frac{n\ldots(n+(m-1))}{1\ldots m}$

Um zu beweisen, daß dieses Gesez immer Statt hat, will ich beweisen, daß dasselbe, wenn es für die figurirten Zahlen einer gewissen Ordnung gilt, auch für die folgende Ordnung gelte. Und da es für die ersten Werthe von m, wie 1, 2, 3, 4, 5.. Statt hat; so wird bewiesen seyn, daß es für alle Werthe von m nach einander Statt hat.

Man bezeichne die Summe der figurirten Zahlen der mten Ordnung durch S^M; so daß

$$S^M = 1 + \frac{m+1}{1} + \frac{(m+1)(m+2)}{1.2} + \frac{(m+1)}{1} \cdot\cdot \frac{m+3}{3} + \frac{(m+1)}{1} \cdot\cdot \frac{(m+4)}{4} + \ldots + \frac{m+1}{1} \cdots \frac{m+n-1}{n-1}$$

Man zerlege jede figurirte Zahl der mten Ordnung in die figurirten Zahlen der (m-1)ten, deren Summe sie ist: man erhält

$$1 = 1$$

$$\frac{m+1}{1} = 1 + \frac{m}{1}$$

$$\frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2}$$

$$\frac{m+1}{1} \cdot\cdot \frac{m+3}{3} = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \frac{m}{1} \cdot\cdot \frac{m+2}{3}$$

$$\frac{m+1}{1} \cdot\cdot \frac{m+4}{4} = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} + \frac{m}{1} \cdot\cdot \frac{m+2}{3} + \frac{m}{1} \cdot\cdot \frac{m+3}{4}$$

$$\frac{m+1}{1} \cdot\cdot \frac{m+5}{5} = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} + \frac{m}{1} \cdot\cdot \frac{m+2}{3} + \frac{m}{1} \cdot\cdot \frac{m+3}{4} + \frac{m}{1} \cdots \frac{m+4}{5}$$

$$\vdots$$

$$\frac{m+1}{1} \cdots \frac{m+n-1}{n-1} = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} + \frac{m}{1} \cdot\cdot \frac{m+2}{3} + \frac{m}{1} \cdot\cdot \frac{m+3}{4} + \frac{m}{1} \cdots \frac{m+4}{5} + \ldots + \frac{m}{1} \cdots \frac{m+n-2}{n-1}$$

$$S^M = 1 \times n + \frac{m}{1}(n-1) + \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2}(n-2) + \frac{m}{1} \cdot\cdot \frac{m+2}{3}(n-3) + \frac{m}{1} \cdots \frac{m+3}{4}(n-4) + \frac{m}{1} \cdots \frac{m+4}{5}(n-5) + \ldots + \frac{m}{1} \cdot\cdot \frac{m+n-2}{n-1}(n-(n-1))$$

$$= n\left(1 + \right.$$

$$= n\left(1 + \frac{m}{1} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2} + \frac{m}{1}\cdot\cdot\frac{m+2}{3} + \frac{m}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+3}{4} + \frac{m}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+4}{5} + \ldots + \frac{m}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+n-2}{n-1}\right)$$

$$- \left(\frac{m}{1} + 2\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2} + 3\cdot\frac{m}{1}\cdot\cdot\frac{m+2}{3} + 4\cdot\frac{m}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+3}{4} + 5\frac{m}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+4}{5} + \ldots + (n-1)\frac{m}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+n-2}{n-1}\right)$$

$$= n\left(1 + \frac{m}{1} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2} + \frac{m}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+2}{3} + \frac{m}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+3}{4} + \frac{m}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+4}{5} + \ldots + \frac{m}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+(n-2)}{n-1}\right)$$

$$- m\left(1 + \frac{m+1}{1} + \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2} + \frac{m+1}{1}\cdot\cdot\frac{m+3}{3} + \frac{m+1}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+4}{4} + \ldots + \frac{m+1}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+n-2}{n-2}\right)$$

Der Coefficient von n in der ersten Reyhe, in welche S^M zerlegt worden, ist die Reyhe der n ersten figurirten Zahlen der (m-1)ten Ordnung, deren Summe die nte figurirte Zahl der nten Ordnung, nämlich $\frac{m+1}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+n-1}{n-1}$ ist.

Die von der ersten abzuziehende Reyhe besteht aus den mfachen der n-1 ersten figurirten Zahlen der mten Ordnung: die Summe ihrer Glieder ist mithin $m(S^M - \frac{m+1}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+n-1}{n-1}$. Man hat also die Gleichung

$$S^M = n \times \frac{m+1}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+n-1}{n-1} - m\left(S^M - \frac{m+1}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+n-1}{n-1}\right)$$

$$= \frac{m+1}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+n-1}{n-1}(m+n) - mS^M. \text{ Folglich}$$

$$S^M(m+1) = \frac{m+1}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+n-1}{n-1}(m+n)$$

$$S^M = \frac{m+2}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+n}{n-1}.$$

Folglich ist der Ausdruk des nten Glieds der Reyhe der figurirten Zahlen der (m+1)ten Ordnung $\frac{m+2}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m+n}{n-1}$; und der Ausdruk des nten Glieds der Reyhe der fi-

gurirten Zahlen der mten Ordnung ist $\frac{m+1}{1} \cdots \frac{m+n-1}{n-1}$
$= \frac{n}{1} \cdots \frac{n+m-1}{m}$.

§. 140.

Da von den figurirten Zahlen häufige und wichtige Anwendungen gemacht werden, so glaube ich hier eine Tafel derselben beybringen zu müssen, welche sich bis auf die 12te Ordnung erstrekt.

Ordnungen								
0..	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,
							1, 1, . . .	1
1..	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
							9, 10, . . .	n
2..	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,
						45,	55, . . .	$\frac{n(n+1)}{1.2}$
3..	1,	4,	10,	20,	35,	56,	84,	120,
						165,	220, . . .	$\frac{n}{1} \cdot \frac{n+2}{3}$
4..	1,	5,	15,	35,	70,	126,	210,	330,
						495,	715, . . .	$\frac{n}{1} \cdot \frac{n+3}{4}$
5..	1,	6,	21,	56,	126,	252,	462,	792,
						1287,	2002, . . .	$\frac{n}{1} \cdot \frac{n+4}{5}$
6..	1,	7,	28,	84,	210,	462,	924,	1716,
						3003,	5005, . . .	$\frac{n}{1} \cdot \frac{n+5}{6}$
7..	1,	8,	36,	120,	330,	792,	1716,	3432,
						6435,	11440, . . .	$\frac{n}{1} \cdot \frac{n+6}{7}$
8..	1,	9,	45,	165,	495,	1287,	5003,	6435,
						12870,	24310, . . .	$\frac{n}{1} \cdot \frac{n+7}{8}$
9..	1,	10,	55,	220,	715,	2002,	5005,	11440,
						24310,	48620, . . .	$\frac{n}{1} \cdot \frac{n+8}{9}$
10..	1,	11,	66,	286,	1001,	3003,	8008,	19448,
						43758,	92378, . . .	$\frac{n}{1} \cdot \frac{n+9}{10}$

11 .. 1, 12, 78, 364, 1365, 4368, 12376, 31824,
75582, 167960, . . . $\frac{n}{1}$ .. $\frac{n+10}{11}$

12 .. 1, 13, 91, 455, 1820, 6188, 18564, 50388,
125970, 293930, . . . $\frac{n}{1}$ .. $\frac{n+11}{12}$

.

.

.

m .. 1, $\frac{m+1}{1}$, $\frac{m+1}{1}$. $\frac{m+2}{2}$, $\frac{m+1}{1}$ .. $\frac{m+3}{3}$, $\frac{m+1}{1}$ .. $\frac{m+4}{4}$,

$\frac{m+1}{1}$ .. $\frac{m+5}{5}$, $\frac{m+1}{1}$ .. $\frac{m+6}{6}$, $\frac{m+1}{1}$ .. $\frac{m+7}{7}$, $\frac{m+1}{1}$ .. $\frac{m+8}{8}$,

$\left.\begin{array}{l} \frac{m+1}{1} .. \frac{m+9}{9}, \ldots . \frac{m+1}{1} .. \frac{m+n-1}{n-1} \\ \text{oder } \frac{n}{1} .. \frac{m+n-1}{m} \end{array}\right\}$

§. 141.

Wir werden in der Folge einige Bemerkungen über diese Tafel zu machen finden. Für jezt begnüge ich mich folgendes zu bemerken:

Vermöge der Entstehung der figurirten Zahlen ist jedes Glied die Summe aller Glieder der vorhergehenden Ordnung: daher ist jedes Glied die Summe zweyer vorhergehenden, deren eines in der nämlichen horizontalen Reyhe, das andere in der nämlichen verticalen Reyhe sich befindet.

Eine horizontale und eine verticale Reyhe, deren Stellen von der ersten horizontalen und von der ersten verticalen Reyhe an gerechnet die nämlichen sind, enthalten die nämlichen Glieder.

Jedes Glied ist die Summe der in der nächstvorhergehenden verticalen Reyhe enthaltenen Glieder bis zu dem Gliede, welches ihm in der nämlichen horizontalen Reyhe zunächst vorangeht.

§. 142.

Die für die Ausdrüke der figurirten Zahlen gefundenen Formeln haben, wie sich durch die Ansicht ergibt, für kleine Werthe der Anzahl n der Glieder, wie 1, 2, 3, 4... Statt. Es wird demnach bewiesen seyn, daß sie für jeden Werth von n Statt haben, wenn man beweist, daß, wenn sie für einen gewissen Werth von n Statt haben, sie auch für den folgenden oder für die um eins größere Zahl Statt haben.

Erstes Beyspiel. Es sey bewiesen, daß der Ausdruk der nten figurirten Zahl der zweyten Ordnung $\frac{n(n+1)}{1.2}$ sey. Da die $(n+1)$te natürliche Zahl $n+1$ ist; so ist die $(n+1)$te figurirte Zahl der zweyten Ordnung $\frac{n(n+1)}{1.2}+n+1=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$. Diese Formel ist mit der vorhergehenden einerley, wenn man darinn $n+1$ statt n sezt.

Zweytes Beyspiel. Es sey bewiesen, daß der Ausdruk der nten figurirten Zahl der dritten Ordnung $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$ sey. Da die $(n+1)$te figurirte Zahl der zweyten Ordnung $\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$ ist; so wird die $(n+1)$te figurirte Zahl der dritten Ordnung $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}=\frac{(n+1)\,n+2)}{1.2}\left(\frac{n}{3}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$ seyn. Diese Formel ist mit der vorhergehenden einerley, wenn man darinne $n+1$ statt n sezt.

Drittes Beyspiel. Es sey bewiesen, daß der Ausdruk der nten figurirten Zahl der vierten Ordnung $\frac{n\ldots(n+3)}{1\ldots4}$ sey. Da die $(n+1)$te figurirte Zahl der dritten Ordnung $\frac{(n+1)..(n+3)}{1.2.3}$ ist; so ist die $(n+1)$te figurirte Zahl der vierten Ordnung $\frac{n\ldots(n+3)}{1\ldots4}+\frac{(n+1)..(n+3)}{1..3}=\frac{(n+1)\ldots(n+3)}{1\ldots3}\left(\frac{n}{4}+1\right)=\frac{(n+1)\ldots(n+4)}{1\ldots4}$. Diese Formel ist mit der ersten einerley, wenn man darinn $n+1$ statt n sezt.

Allgemein. Es sey bewiesen, daß der Ausdruk der nten figurirten Zahl der mten Ordnung $\frac{n.\,n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots m}$ sey; und diese Formel sey für alle vorhergehende Ordnungen bewiesen. So ist mithin auch die $(n+1)$te figurirte Zahl der $(m-1)$ten Ordnung $\frac{(n+1)\ldots(n+1+m-2)}{1\ldots(m-1)} = \frac{(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\ldots(m-1)}$. Folglich ist die $(n+1)$te figurirte Zahl der mten Ordnung $\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots m} + \frac{(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\ldots(m-1)}$ $= \frac{(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\ldots m-1}\left(\frac{n}{m}+1\right) = \frac{(n+1)\ldots(n+m)}{1\ldots m}$. Diese Formel ist mit der vorausgesezten für das nte Glied, $\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots m}$, einerley, wenn man darinn $n+1$ statt n sezt.

Neuntes Kapitel.

Ueber Permutationen und Combinationen.

Erster Theil.

Ueber die Permutationen oder Versetzungen.

§. 143.

Es seyen zwey verschiedene Buchstaben a und b: diese können auf zweyerley Arten zusammen gestellt werden: ab, ba

Es seyen drey verschiedene Buchstaben a, b, c. Diese können auf folgende sechs verschiedenen Arten zusammengestellt werden:

abc bac cab
acb bca cba.

Nimmt nämlich irgend einer dieser drey Buchstaben einen bestimmten Plaz ein, zum Beyspiel den ersten; so können die beyden andern auf zwey verschiedene Arten gestellt werden. Nun kann aber jeder der drey Buchstaben diesen bestimmten Plaz einnehmen; folglich lassen sich diesen drey Buchstaben dreymal zwey oder sechs verschiedene Anordnungen geben.

Ebenso, wenn man vier Buchstaben a, b, c, d hat. Einer dieser Buchstaben mag einen Plaz einnehmen, welchen man will; so können die drey übrigen auf sechs verschiedene Arten angeordnet werden. Nun kann aber jeder der vier Buchstaben diesen bestimmten Plaz einnehmen. Folglich lassen sich diesen vier Buchstaben viermal sechs oder vier und zwanzig verschiedene Anordnungen geben: wie folgendes Schema weist:

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

Ebenso zeigt man, daß die Anzahl der verschiedenen Anordnungen, welche sich fünf, sechs, sieben, acht . . . verschiedenen Buchstaben geben lassen, durch das continuirliche Produkt der fünf, sechs, sieben, acht . . ersten natürlichen Zahlen ausgedrükt wird. Allgemein wird die Anzahl der verschiedenen Anordnungen n verschiedener Buchstaben durch das continuirliche Product der n ersten natürlichen Zahlen ausgedrükt *).

*) Was über die Anordnung von Buchstaben gesagt wird, ist von der Anordnung jeder Art von Grössen zu verstehen, welche man durch Buchstaben bezeichnen kann. So wird die Zahl, welche angibt, auf wie vielerley Arten zwölf Personen zusammen gestellt werden können, durch das continuirliche Produkt der zwölf ersten natürlichen Zahlen ausgedrükt, welche 479 001 600 ist. Und da das Jahr 525 948 Minuten enthält, so folgt, daß, wenn diese zwölf Personen ihre

§. 129.

Es seyen zum Beyspiel fünf Buchstaben, und unter diesen zwey die nämlichen; nämlich a, a, b, c, d. Für jede bestimmte Anordnung der drey verschiedenen Buchstaben b, c, d können den beyden übrigen Buchstaben zwey verschiedene Anordnungen gegeben werden, wenn sie verschieden wären; da sie aber einerley sind, so reduciren sich diese beyden Anordnungen auf eine einzige. Mithin ist die Anzahl der Anordnungen, die sich den fünf vorgelegten Buchstaben geben lassen, halb so gros als die Anzahl der Anordnungen, welche sich fünf verschiedenen Buchstaben geben liessen. Aber leztere Anzahl ist 1. 2. 3. 4. 5 = 120. Folglich ist erstere Anzahl die Hälfte von 120 oder 60. Ebenso, wenn drey von den vorgelegten Buchstaben einerley sind, reduciren sich alle Anordnungen, welche nur in Absicht der Ordnung dieser drey Buchstaben von einander unterschieden sind, auf eine einzige. Aber diese drey Buchstaben könnten, als von einander verschieden betrachtet, in den drey Stellen, welche sie einnehmen, sechs verschiedene Anordnungen annehmen. Folglich ist die Anzahl der Anordnungen von fünf Buchstaben, wovon drey einerley sind, der sechste Theil von der Anzahl der Anordnungen, welche sie erhalten könnten, wenn sie alle verschieden wären: diese Anzahl ist mithin $\frac{1.2.3.4.5}{1.2.3} = 4 \cdot 5 = 20$.

Allgemein; Seyen von n Buchstaben ihrer m einerley. Wären sie alle verschieden, so wäre die Anzahl ihrer Anordnungen $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$. Wenn m von diesen Buchstaben einerley sind, so muß dis Produkt durch das continuirliche Produkt $1 \times 2 \times 3 \ldots \times m$ dividirt werden, welches die Anzahl der Anordnungen angibt, welche sich m verschiedenen Buchstaben geben lassen. Mithin ist die Anzahl der Anordnungen von n Buchstaben, deren m einerley sind,

Stellenveränderungen schnell genug vornähmen, um deren 10 in einer Minute zu Stande zu bringen, sie doch mehr als 90 Jahre dazu brauchten, um alle mögliche Anordnungen darzustellen.

$$\frac{1\times2\times3\times\ldots\times m\times(m+1)\times\ldots\ldots n}{1\times2\times3\times\ldots\times m}=(m+1)(m+2)(m+3)\ldots n$$

Beyspiel. Die Anzahl der verschiedenen Anordnungen von neun Buchstaben, deren fünf einerley sind, ist $6\times7\times8\times9=3024$.

Es seyen neun Buchstaben zum Beyspiel, wovon drey einerley seyen, und deren Anzahl der Anordnungen folglich $4\times5\times6\times7\times8\times9$ ist. Zwey von den sechs übrigen Buchstaben seyen wiederum die nämlichen: jede zwey Anordnungen, welche nur in Absicht auf die Ordnung dieser leztern Buchstaben verschieden sind, werden sich wiederum auf eine einzige reduciren; mithin reducirt sich vorhergehende Anzahl auf ihre Hälfte. Wären drey dieser Buchstaben die nämlichen, so würde die Anzahl der Anordnungen sich auf ein Sechstheil von ihr reduciren. Wären vier dieser Buchstaben die nämlichen: so müßte vorhergehende Anzahl durch 24 dividirt werden; und so fort. Allgemein seyen von n Buchstaben deren m unter einander einerley, und von den $n-m$ übrigen wiederum m' unter einander einerley. Die Anzahl der Anordnungen, welche bey diesen Buchstaben Statt haben, ist $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots n}{1\times2\times3\times\ldots m'}$.

§. 144.

Der wichtigste Fall ist, wenn von n Buchstaben m die nämlichen, und die n-m übrigen auch alle unter einander einerley, aber von den ersten verschieden sind. Die Anzahl der verschiedenen Anordnungen dieser Buchstaben ist alsdenn

$$\frac{1.2.3.4.5\ldots\ldots n}{1.2.3.4.m.1,2.3\ldots.(n-m)}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)\ldots\ldots n}{1.2.3,\ldots,(n-m)}=\frac{1^{\circ}\cdot n(n-1)(n-2)\ldots(m+1)}{1,2,3\ldots,(n-m)}$$

$$=\frac{2^{\circ}\cdot n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-(m-1))}{1,2.3\ldots m}$$

Es ist vortheilhaft, die erste oder zweyte dieser For-

meln zu gebrauchen, je nachdem m größer oder kleiner als die Hälfte von n ist.

Ist $m=n$; das heißt: sind alle Buchstaben von der ersten Gattung; so wird der zweyte Ausdruk $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{1.2.3\ldots n}$ $=1$. Ist $m=0$, oder sind alle Buchstaben von der zweyten Gattung, so wird die erste Formel $=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{1.2.3\ldots n}$ $=1$. In beyden Fällen ist von soviel Größen als man will, welche alle einerley sind, nur eine einzige Anordnung möglich.

Sey $m=\frac{1}{n-1}$. Die Anzahl der Anordnungen ist n. Der einzige verschiedene Buchstabe nämlich kann jede der n Stellen einnehmen, welche die n Buchstaben einnehmen sollen.

Anzahl der Anordnungen.

Sey $m=\frac{2}{n-2}\ldots\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}$

$m=\frac{3}{n-3}\ldots\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}$

$m=\frac{4}{n-4}\ldots\frac{n}{1}\ldots\frac{n-3}{4}$

$m=\frac{5}{n-5}\ldots\frac{n}{1}\ldots\frac{n-4}{5}$

$m=\frac{6}{n-6}\ldots\frac{n}{1}\ldots\frac{n-5}{6}$

$m=\frac{7}{n-7}\ldots\frac{n}{1}\ldots\frac{n-6}{7}$

Zweyter Theil.

Ueber die Combinationen.

§. 145.

Es seyen zwey verschiedene Buchstaben a und b. Diese können auf eine einzige Art zu zwey und zwey genommen werden, wenn man nicht auf ihre Ordnung Rüksicht nimmt.

Es seyen drey verschiedene Buchstaben a, b, c: man verlangt alle Arten, sie zu zwey und zwey zu nehmen. Einer dieser Buchstaben wie a, kann mit jedem der beyden übrigen genommen werden: welches die beyden Combinationen ab, ac gibt. Ebenso kann der Buchstabe b mit jedem der beyden andern a und c genommen werden: welches die beyden Combinationen ba, bc gibt. Endlich kann der Buchstabe c mit jedem der beyden andern a und b genommen werden; woraus sich die beyden Combinationen ca, cb ergeben. Man hat mithin in allem die sechs Combinationen: ab ba ca / ac bc cb. Diese Combinationen enthalten zu zwey und zwey die nämlichen Buchstaben, nur in verschiedener Ordnung. Wenn mithin die Ordnung der Buchstaben bey jeder Zusammenstellung gleichgültig ist, so wird die Anzahl ihrer Combinationen sich auf ihre Hälfte, oder auf drey reduciren: nämlich $\frac{ab}{ac}$, bc.

Ebenso seyen vier Buchstaben a, b, c, d, welche man zu zwey und zwey nehme. Mit Rükficht auf die Ordnung der Buchstaben in jeder Combination hat man die zwölf Combinationen:

ab ba ca da
ac bc cb db
ad bd cd dc.

Wenn die Ordnung der Buchstaben in jeder Combination gleichgültig ist, so reduciren sie sich auf folgende sechs

ab
ac bc
ad bd cd

Ebenso wenn fünf verschiedene Buchstaben a, b, c, d, e zu zwey und zwey genommen werden, so sind zwanzig Combinationen möglich, wenn man auf die Ordnung der Buchstaben, aus denen sie bestehen, Rükficht nimmt; und wenn diese Ordnung gleichgültig ist, so reducirt sich die Anzahl dieser Combinationen auf zehen: nämlich

ab
ac bc
ad bd cd
ae be ce de.

Allgemein. Seyen n Buchstaben zu zwey und zwey zu combiniren. Die Anzahl der Combinationen, in welchen einer dieser Buchstaben einen bestimmten Plaz, zum Beyspiel den ersten, einnehmen kann, wird durch die Anzahl n - 1 der übrigen Buchstaben ausgedrükt, von denen jeder den übrigen Plaz einnehmen kann. Nun kann aber jeder der vorgelegten Buchstaben nach dem andern diesen ersten Plaz einnehmen: folglich ist, wenn man auf die Ordnung der Buchstaben in jeder Combination Rükſicht nimmt, die Anzahl der möglichen Combinationen von n Buchstaben zu zwey und zwey n(n - 1). Aber diese Combinationen bestehen paarweise aus den nämlichen nur verschiedentlich angeordneten Buchstaben; folglich ist, wenn ihre Ordnung gleichgültig ist, die Anzahl der verschiedenen Combinationen nur die Hälfte der vorhergehenden Zahlen, nämlich $\frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{(n-1)n}{1.2}$.

Diese Zahl ist demnach die (n - 1)te Triangularzahl, oder die Summe der n - 1 ersten natürlichen Zahlen: welches man noch auf andere Art so entwikkeln kann:

Einer der gegebenen Buchstaben, wie z. B. der erste, kann mit den n - 1 übrigen zusammengestellt werden. Der zweyte Buchstabe kann mit den n - 2 folgenden, der dritte mit den n - 3 folgenden, der vierte mit den n - 4 folgenden zusammengestellt werden, und so fort, bis zum ohneinslezten, welcher mit dem lezten zusammengestellt werden kann. Mithin wird die Anzahl der verschiedenen Arten, diese Buchstaben zu zwey und zwey zusammen zu stellen, durch die Summe der n - 1 ersten natürlichen Zahlen ausgedrükt, welche $\frac{(n-1)n}{1.2}$ ist.

§. 146.

Es seyen drey verschiedene Buchstaben a, b, c. Diese kann man, von ihrer Ordnung abgesehen, nur auf eine einzige Art zu dreyen zusammen stellen.

Es seyen vier verschiedene Buchstaben a, b, c, d zu drey und drey zusammen zu stellen. Einer dieser Buchstaben wie a, kann, indem er einen bestimmten Plaz einnimmt, mit den übrigen Buchstaben auf soviel Arten zusammen gestellt werden, als man diese zu zwey und zwey nehmen kann: und wenn man mithin auf die Ordnung dieser Buchstaben bey jeder Zusammenstellung Rükſicht nimmt, so ist die Anzahl der Anordnungen, in welchen irgend einer der gegebenen Buchstaben einen bestimmten Plaz einnimmt $3.2=6$. Aber jeder dieser Buchstaben kann diesen Plaz einnehmen, und mithin mit allen übrigen, die die beyden übrigen Pläze einnehmen, zusammengestellt werden. Folglich können diese Buchstaben, wenn man auf ihre Ordnung bey jeder Zusammenstellung Rükſicht nimmt, auf soviel Arten zu drey und drey zusammen gestellt werden, als die Zahl $4.3.2=24$ besagt. Aber wenn die Ordnung bey jeder Combination gleichgültig ist, so ist die Anzahl der Combinationen nur ein Sechstel hievon, indem je sechs von diesen Combinationen dieselbe nur verschiedentlich angeordnete Buchstaben enthalten; die Anzahl ist mithin $\frac{2\cdot3\cdot4}{1.2.3}=\frac{24}{6}=4$, wie folgt:

abc
abd bcd
acd

Allgemein. Es seyen n verschiedene Buchstaben zu drey und drey zu nehmen. Einer dieser Buchstaben kann, indem er einen bestimmten Plaz einnimmt, mit den $n-1$ übrigen auf so viel Arten zusammengestellt werden, als man diese zu zwey und zwey nehmen kann; und die Anzahl dieser Arten ist (mit Rükſicht auf die Ordnung) $(n-2)(n-1)$. Aber jeder der n Buchstaben kann jenen bestimmten Plaz einnehmen, und so mit allen übrigen Buchstaben zusammengestellt

werden; folglich ist (mit Rükſicht auf die Ordnung) die Anzahl der Combinationen der n Buchſtaben zu drey und drey, (n-2)(n-1). Aber von dieſen Combinationen beſtehen je ſechs aus den nämlichen nur verſchiedentlich geſtellten Buchſtaben: folglich iſt die Anzahl der verſchiedenen oder aus Buchſtaben, welche nicht alle die nämlichen ſind, beſtehenden Combinationen $\frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}$; welches die (n-2)te figurirte Zahl der dritten Ordnung iſt, (oder der Coefficient des vierten Glieds eines auf die nte Potenz erhobenen Binoniums) oder die Anzahl der Verſezungen, welche ſich von n Buchſtaben machen laſſen, deren drey von einer Art, und die n-3 übrigen von einer andern Art ſind.

Die Zahl nämlich, welche angibt, auf wie vielerley Arten n Buchſtaben, deren drey unter ſich einerley, und n-3 auch unter ſich, aber nicht mit den erſten einerley ſind, zuſammengeſtellt werden können, iſt einerley mit der Zahl, welche angibt, auf wie viel Arten die drey als einerley genannten Buchſtaben in den n durch alle Buchſtaben zu beſezenden Pläzen geſtellt werden können: das iſt, mit der Zahl, welche angibt, auf wieviel Arten dieſe Pläze zu drey und drey genommen werden können.

Man kann dieſe Unterſuchung auch auf die Summation der Triangularzahlen zurükführen, ohne die Vorausſezung zu Hülfe zu nehmen, daß man auf die Anordnung der Buchſtaben in jeder Combination Rükſicht nehme.

Der erſte Buchſtabe läßt ſich nämlich mit den n-1 übrigen zu zwey und zwey genommen zuſammenſtellen; mithin iſt die Anzahl der (aus lauter verſchiedenen Buchſtaben beſtehenden) Combinationen, in welchen dieſer erſte Buchſtabe enthalten iſt, $\frac{(n-2)(n-1)}{1.2}$.

Ebenſo läßt ſich der zweyte Buchſtabe mit den n-2 folgenden zu zwey und zwey genommen auf ſoviel Arten verbinden, als die Zahl $\frac{(n-3)(n-2)}{1.2}$ angibt.

Der dritte Buchstabe läßt sich mit den n-3 folgenden zu zwey und zwey genommen auf $\frac{(n-5)(n-4)}{1.2}$ Arten verbinden.

Und so fort bis zum (n-2)ten Buchstaben, welcher sich mit den beyden lezten nur auf eine Art zusammenstellen läßt.

Folglich läßt sich die Zahl, welche angibt, auf wie viel Arten n Buchstaben sich zu drey und drey zusammenstellen lassen, durch die Summe der Triangularzahlen von der Einheit an bis zu $\frac{(n-2)(n-1)}{1.2}$, das ist, durch die Summe der n-2 ersten Triangularzahlen ausdrüken, welche $\frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}$, oder die (n-2)te figurirte Zahl der dritten Ordnung ist.

§. 147.

Es seyen n Buchstaben zu vier und vier zu combiniren.

Irgend einer dieser Buchstaben läßt sich, indem er einen bestimmten Plaz einnimmt, mit den n-1 übrigen auf alle die Arten zusammenstellen, auf welche man diese zu drey und drey nehmen kann: die Anzahl dieser Arten ist aber (mit Rükſicht auf die verschiedenen möglichen Anordnungen jeder Zusammenstellung) (n-3)(n-2)(n-1). Nun kann aber jeder Buchstabe diesen bestimmten Plaz einnehmen, und mit den n-1 übrigen zu drey und drey zusammengestellt werden; folglich ist die Anzahl der Combinationen dieser Buchstaben zu vier und vier, mit Rükſicht auf die Ordnung der Buchstaben in jeder Combination, (n-3)(n-2)(n-1)n. Aber die Anzahl der aus den nämlichen Buchstaben bestehenden und nur in Absicht auf die Anordnung dieser Buchstaben von einander verschiedenen Combinationen ist die Zahl, welche anzeigt, auf wieviel Arten sich vier Buchstaben zusammenstellen lassen, nämlich 1.2.3.4 =24. Folglich ist die Anzahl der in Absicht auf die Buchstaben, aus denen sie bestehen, von einander verschiedenen Combinationen von n Buchstaben zu vier und vier, $\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.2.3.4}$. Diese Zahl ist die (n-3)te figurirte Zahl

der vierten Ordnung, und sie ist auch die Zahl, welche angibt, auf wieviel Arten n Buchstaben angeordnet werden können, deren vier einerley Namen, und die übrigen n-4 auch einerley, aber einen andern Namen haben.

Wirklich ist die Zahl, welche angibt, auf wieviel Arten n Buchstaben von zweyerley Namen, deren vier einerley Namen haben, angeordnet werden können, einerley mit der Zahl, welche angibt, auf wieviel Arten diese vier Buchstaben in die n von allen Buchstaben zu besezenden Pläze gestellt werden können, das ist, mit der Zahl, welche angibt, auf wieviel Arten sich diese n Pläze zu vier und vier nehmen lassen.

Diese Untersuchung läßt sich auch, ohne daß man auf die Ordnung der Buchstaben in jeder Combination Rükſicht zu nehmen nöthig hätte, auf die Summation der figurirten Zahlen der dritten Ordnung zurükführen.

Der erste Buchstabe bildet nämlich eine Combination von vier Buchstaben mit den n-1 übrigen Buchstaben, zu drey und drey zusammen genommen, auf soviel Arten als leztere sich zu drey und drey zusammen nehmen lassen, das ist, auf $\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{1.2.3}$ Arten.

Der zweyte Buchstabe bildet neue Combinationen von vier Buchstaben mit den n-2 folgenden Buchstaben, zu drey und drey zusammen genommen, auf soviel Arten, als diese n-2 Buchstaben sich zu drey und drey zusammen nehmen lassen, das ist, auf $\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{1.2.3}$ Arten.

Der dritte Buchstabe bildet neue Combinationen von vier Buchstaben mit den n-3 folgenden, zu drey und drey zusammen genommen, auf so viel Arten, als leztere sich zu drey und drey zusammen nehmen lassen, das ist, $\frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{1.2.3}$.

Und so fort bis auf den (n-3)ten Buchstaben, welcher eine neue Combination von vier Buchstaben mit den drey

übrigen bildet, welche eine einzige Combination zu dreyen ausmachen.

Folglich läßt sich die Anzahl der in Absicht auf die darinn enthaltenen Buchstaben verschiedenen Combinationen zu vier Buchstaben, welche sich aus n Buchstaben machen lassen, durch die Summe der figurirten Zahlen der dritten Ordnung von der Einheit an bis auf $\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{1.2.3}$, oder bis zur (n-3)ten figurirten Zahl dieser Ordnung ausdrükken; welche Summe die (n-3)te figurirte Zahl der vierten Ordnung ist, nämlich $\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.2.3.4}$

§. 148.

Allgemein: Es sey bewiesen, daß die Anzahl der Combinationen von n Buchstaben zu m und m sey n(n-1)(n-2)...(n-(m-1)), wenn man auf die Ordnung der Buchstaben in jeder Combination Rükficht nimmt, und folglich, wenn diese Rükficht bey Seite gesezt wird, $\frac{n(n-1)(n-2)....(n-(m-1)}{1.2.3...m}$). So findet man, daß die Anzahl der Combinationen von n Buchstaben zu je m+1, mit Rükficht auf die Ordnung in jeder Combination, n(n-1)(n—2)...(n—m), und mithin ohne diese Rükficht $\frac{n(n-1)(n-2)...(n-m)}{1.2.3...(m+1)}$ sey.

Denn man seze irgend einen dieser Buchstaben in einen bestimmten Plaz, so läßt sich derselbe mit den n-1 übrigen, zu m und m genommen, zu Combinationen von m+1 Buchstaben auf so viel Arten zusammenstellen, als diese übrige sich zu m und m zusammenstellen lassen, das ist, mit Rükficht auf die Ordnung, auf (n-1)(n-2)(n-3)... (n-m) Arten. Und da jeder Buchstabe diesen bestimmten Plaz einnehmen, und mit allen möglichen Combinationen zu m aus allen übrigen zusammengestellt werden kann; so ist die Anzahl aller aus m+1 Buchstaben bestehenden, und entweder in Absicht auf die darinn enthaltene Buchstaben oder auf die Ordnung verschiedenen Combinationen von n

Buch-

Buchstaben ... $n(n-1)(n-2)....(n-m)$. Jede aus den nämlichen $m+1$ Buchstaben bestehende Combination aber ist sovielmal wiederholt, als die Zahl besagt, welche angibt, auf wieviel Arten sich $m+1$ Buchstaben anordnen lassen, nämlich $1.2.3...(m+1)$. Folglich ist die Anzahl der nur in Absicht auf diese zusammensezenden Buchstaben verschiedenen Combinationen $\frac{n(n-1)(n-2)...(n-m)}{1.2.3...(m+1)}$.

Anders. Ohne die Vorausſezung, daß man auf die Ordnung der Buchstaben in jeder Combination Rükſicht nehme:

Der erste Buchstabe kann verschiedene Combinationen von $m+1$ Buchstaben mit den $n-1$ übrigen Buchstaben, zu verschiedenen Combinationen von m Buchstaben zusammengestellt, bilden: die Anzahl dieser leztern ist aber nach der Vorausſezung $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)...(n-m)}{1.2.3...m}$.

Der zweyte Buchstabe bildet neue verschiedene Combinationen von $m+1$ Buchstaben mit den $n-2$ übrigen, auch zu verschiedenen Combinationen von m Buchstaben zusammengestellt; die Anzahl derselben ist (Vorauss.) $\frac{(n-2)(n-3)...(n-m-1)}{1.2...m}$.

Der dritte Buchstabe bildet neue verschiedene Combinationen von $m+1$ Buchstaben mit den $n-3$ übrigen Buchstaben, auch zu Combinationen von m zusammengestellt; die Anzahl derselben ist $\frac{(n-3)(n-4)...(n-m-2)}{1.2...m}$.

Und so fort, bis man auf den $(n-m)$ten Buchstaben kommt, welcher eine einzige Combination von $m+1$ Buchstaben mit der Combination zu m aus den m übrigen Buchstaben bilden kann.

Folglich wird die Zahl der verschiedenen Combinationen von $m+1$ Buchstaben, welche sich aus n Buchstaben machen lassen, ausgedrükt durch die Summe der figurirten Zahlen der $m$ten Ordnung von der Einheit an bis zur

(n-m)ten, welche $\frac{(n-m)(n-(m-1))\ldots(n-1)}{1.2\ldots m}$ ist; welche Summe die (n-m)te figurirte Zahl der (m+2)ten Ordnung, nämlich $\frac{(n-m)(n-(m-1))\ldots(n-1)n}{1.2\ldots(m+1)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{1.2.3\ldots(m+1)}$ ist.

Folglich wird im allgemeinen die Zahl der Combinationen zu m Buchstaben, welche sich aus n Buchstaben machen lassen, ausgedrükt durch die (n-m)te figurirte Zahl der mten Ordnung; nämlich

$$\frac{(n-m)(n-(m-1))(n-(m-2))\ldots(n-1)n}{1.2.3\ldots(m-1)m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(m-1))(n-m)}{1.2\ldots(m-1)m}$$

§. 149.

Anwendung auf die Theiler der Zahlen. Es sey eine Zahl aus z. B. fünf ungleichen Primzahlen a, b, c, d, e zusammengesezt.

Die Theiler dieser Zahlen sind

1°. die Einheit

2°. die fünf Primzahlen, aus denen sie zusammengesezt ist.

3°. die Produkte dieser fünf Factoren zwey und zwey genommen; deren Anzahl ist $\frac{5.4}{1.2} = 10$.

4°. die Produkte dieser fünf Factoren zu drey und drey: deren Anzahl ist $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$.

5°. die Produkte dieser fünf Factoren zu vier und vier, deren Anzahl ist $\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5$.

6°. das continuirliche Produkt dieser Factoren, oder die Zahl selbst.

Erste Anmerkung. Wird die gegebene Zahl durch die Primzahlen dividirt, aus denen sie nach der Voraussezung zusammengesezt ist; so erhält man zu Quotienten die Produkte von vier Dimensionen aus den übrigen Theilen: und umgekehrt, wenn die gegebene Zahl durch diese Produkte von vier Dimensionen dividirt wird, so erhält man

zu Quotienten die übrigen Factoren von einer Dimension. Ebenso wenn die gegebene Zahl durch die Produkte von zwo Dimensionen aus diesen Primzahlen dividirt wird, so erhält man zu Quotienten die Produkte von drey Dimensionen aus den übrigen Theilern: und umgekehrt, wenn die Produkte von drey Dimensionen aus diesen Primzahlen zu Theilern genommen werden, so erhält man zu Quotienten die Produkte von zwo Dimensionen aus diesen Factoren; und so fort.

Primdivisoren a, b, c, d, e
correspondirende Theiler von vier Dimensionen
bcde, acde, abde, abce, abcd
Theiler von zwo Dimensionen
ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de
correspondirende Theiler von drey Dimensionen
cde, bde, bce, bcd, ade, ace, acd, abe, abd, abc
Factoren von 0 Dimensionen oder die Einheit . . . 1
Factoren von 5 Dimensionen oder die Zahl selbst . . abcde

Zweyte Anmerkung. Der Leichtigkeit der Ausübung wegen verfährt man gewöhnlich etwas verschieden, um alle Divisoren einer gegebenen Zahl vermittelst ihrer Primdivisoren zu bestimmen.

Man nehme irgend einen ihrer einfachen Factoren, wie a: multiplicire diesen Factor durch einen andern einfachen Theiler derselben wie b, und seze diesen leztern Factor sowohl als das Produkt in eine horizontale Linie unter a.

Man nehme einen dritten einfachen Factor wie c; multiplicire durch diesen Factor die gefundenen aus den Primdivisoren a und b sich ergebenden Theiler; und seze diesen dritten Theiler und diese Produkte in eine dritte Horizontallinie.

Man nehme einen vierten Primfactor wie d; multiplicire durch diesen Factor die gefundenen aus den Primdivisoren a, b, c sich ergebenden Theiler; und seze diesen vierten Theiler und diese Produkte in eine vierte Horizontallinie.

Man nehme einen fünften Primfactor wie e; multiplicire durch diesen Factor die gefundenen aus den Primdivisoren a, b, c, d sich ergebenden Theiler; und seze diesen fünften Theiler und diese Produkte in einerley Horizontallinie.

Man seze diese Multiplication und die nämliche Anordnung mit dem sechsten, siebenten, achten . . . Factor fort, bis man alle Primdivisoren der gegebenen Zahl erschöpft hat.

Schema dieses Verfahrens für eine aus fünf Primfactoren a, b, c, d, e zusammengesezte Zahl.

a
b, ab
c, ac, bc, abc
d, ad, bd, cd, abd, acd, bcd, abcd
e; ae, be, ce, de; abe, ace, ade, bce, bde, cde; abce, abde, acde, bcde; abcde

Scholion. Wenn eine Zahl durch Potenzen einer Primzahl theilbar ist; so wird man fast auf dieselbe Art alle aus diesen Potenzen sich ergebende Theiler dieser Zahl finden, indem man die aus den andern Primdivisoren sich ergebenden Divisoren durch alle diejenige Potenzen multiplicirt, deren Exponent nicht grösser ist als der Exponent der höchsten Potenz dieser die gegebene Zahl dividirenden Primzahl *.

§. 150.

Die Theorie der Versezungen und Combinationen findet vorzüglich zahlreiche und wichtige Anwendungen in der

*) Wenn eine gegebene Zahl N sich auf die Form $a^m b^n c^p \ldots$ reduciren läßt, wo a, b, c . . . Primzahlen vorstellen; so hat sie zu Theilern alle Glieder des entwickelten Produkts $(1+a+a^2+a^3+\ldots+a^m)(1+b+b^2+b^3+\ldots+b^n)(1+c+c^2+c^3+\ldots+c^p)$ u. s. w.; mithin ist die Anzahl ihrer Theiler $(m+1)(n+1)(p+1)$ u. s. w.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, welcher sie als vornehmste Grundlage dient. Dieser Zweig des auf angewandte Mathematik sich beziehenden Calculs ist einer der fruchtbarsten in Absicht auf wichtige Folgerungen. Ich werde mich begnügen, zwo Anwendungen desselben zu zeigen.

Die erste bezieht sich auf die Art von Lotterie, welche unter dem Namen des Genuesischen Lotto bekannt ist, bey welcher man die Gewinnsucht des unerfahrnen zu reizen sucht, indem man die wahre Beschaffenheit des Risiko maskirt.

Diese Lotterie besteht aus 50 Numern, von denen man bey jedem Zug fünf herauszieht.

Die vorzüglichsten Arten, sich bey dieser Lotterie zu interessiren, sind folgende:

1°. durch einfaches Herausziehen. Der Spieler, welcher eine Numer gewählt hat, gewinnt, wenn dieselbe sich unter den fünf herausgezogenen befindet.

2°. durch Amben. Der Spieler wählt zwey Numern; und er gewinnt, wenn sie sich beyde unter den fünf herausgezogenen Numern befinden.

Die 90 Numern lassen soviel Amben zu, auf wieviel Arten 90 Größen zu zwey und zwey genommen werden können; nämlich $\frac{90}{1} \cdot \frac{89}{2} = 4005$. Die fünf herausgezogenen Numern lassen soviel Amben zu auf wieviel Arten fünf Größen zu zwey und zwey genommen werden können, nämlich $\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} = 10$. Man sezt demnach in eine Lotterie von 4005 Loosen, wovon 10 gut sind, mithin auf 400 Loose nicht einmal ein gutes fällt.

3°. durch Ternen. Man wählt drey Numern, und gewinnt, wenn sie alle drey sich unter den fünf herausgezogenen befinden.

Bey 90 Numern sind soviel Ternen möglich, als die Zahl besagt, welche angibt, auf wieviel Arten sich 90 Größen zu drey und drey nehmen lassen; nämlich $\frac{90}{1} \cdot \frac{89}{2} \cdot \frac{88}{3} =$

117 480. Bey fünf herausgezogenen Numern sind soviel Ternen möglich, als die Zahl besagt, welche angibt, auf wieviel Arten sich fünf Größen zu drey und drey nehmen lassen, nämlich $\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{3} = 10$. Demnach sezt man in eine Lotterie von 117480 Loosen, wovon 10 gut sind, oder in eine Lotterie, in welcher von 11748 Loosen ein einziges gut ist.

4°. durch Quaternen. Man wählt vier Numern, und gewinnt, wenn sie sich alle vier unter den fünf herausgezogenen befinden.

Bey 90 Numern sind soviel Quaternen möglich, auf wieviel Arten sich 90 Größen zu vier und vier nehmen lassen, nämlich $\frac{90}{1} \cdot \frac{89}{2} \cdot \frac{88}{3} \cdot \frac{87}{4} = 2\,555\,190$. Bey den fünf herausgezogenen Numern sind soviel Quaternen möglich, auf wieviel Arten sich fünf Größen zu vier und vier nehmen lassen, nämlich $\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{5}{1} = 5$. Man sezt demnach in eine Lotterie von 2 555 190 Loosen, deren fünf gut sind, oder in eine Lotterie von 511 038, wovon ein einziges gut ist.

5°. durch Quinen. Man interessirt sich zu fünf Numern, welche die fünf herausgezogenen seyn müssen.

Die fünf Numern lassen soviel Quinen zu, auf wieviel Arten sich 90 Größen zu fünf und fünf nehmen lassen, nämlich $\frac{90}{1} \cdot \frac{89}{2} \cdot \frac{88}{3} \cdot \frac{87}{4} \cdot \frac{86}{5} = 43\,949\,268$. Die fünf herausgezogene Numern lassen eine einzige Quine zu. Man sezt demnach in eine Lotterie von 43949268 Loosen, wovon ein einziges gut ist.

Es gibt noch andere Arten, sich bey dieser Lotterie zu interessiren, indem man die Ordnung bestimmt, nach welcher die gewählten Numern herauskommen sollen, oder auch ihre Stellen unter den fünf herausgezogenen Numern. Was ich über die ersten Arten zu spielen gesagt habe, welche die gewöhnlichsten sind, ist ohne Zweifel hinreichend, um begreiflich zu machen, wie ungünstig dieses Spiel denjenigen ist, die sich dabey interessiren.

§. 151.

Als zweytes Beyspiel gebrauche ich die verschiedenen Arten, wie mit gewönlichen Würfeln, deren sechs Seiten von eins bis sechs bezeichnet sind, und deren Anzahl nicht grösser ist als sechs, die verschiedenen mit denselben möglichen Würfe herbeygeführt werden können.

1°. Die Würfe, welche man mit einem Würfel werfen kann, gehen von eins bis sechs inclusive; und jeder dieser Würfe kann nur auf eine Art geworfen werden.

2°. Die Würfe, welche man mit zwey Würfen werfen kann, wachsen von zwey bis zwölf inclusive. Die Anzahl der Arten, auf welche zwey Würfel die eilf Würfe herbeyführen können, ist 36. Jeder der sechs Seiten nämlich, welche einer von beyden Würfeln zeigen kann, können die sechs Seiten des andern Würfels entsprechen; folglich gibt es sechsmal sechs oder 36 Arten, wie die beyden Würfel sich zeigen können. Diese 36 Arten können die 11 verschiedene Würfe auf folgende Weisen herbeyführen:

Herbeyzuführende Würfe	Seiten der Würfel	Besondere Anzahlen der Arten, wie sie sich zeigen können.	Total Anzahl
II	1.1	1	1
III	1.2	2	2
IV	1.3 2.2	2 1	3
V	1.4 2.3	2 2	4
VI	1,5 2,4 3,3	2 2 1	5
VII	1,6 2,5 3,4	2 2 2	6

VIII	2,6	2	5
	3,5	2	
	4,4	1	
IX	3,6	2	4
	4,5	2	
X	4,6	2	3
	5,5	1	
XI	5,5	2	2
XII	6,6	1	1

Die Summe der Arten, alle Würfe von II bis XII herbeyzuführen ist 30, wie sie seyn muß.

Man sieht aus diesem Schema, daß die Würfe II und XII, und die von denselben gleichweit entfernten je zwey und zwey auf gleichviel Arten herbeygeführt werden können; und daß die Würfe

II, III, IV, V, VI

XII, XI, X, IX, VIII

welche paarweise zusammen die Summe XIV machen, sich in Absicht auf die Arten, wie sie herbeygeführt werden können, so entsprechen, daß, wenn man die Arten bestimmt hat, wie die Würfe unter VII herbeygeführt werden können, daraus die Arten, die gleichweit über VII gehenden Würfe herbeyzuführen, sich bestimmen lassen, indem man statt der Seiten

1, 2, 3, 4, 5, 6

durch welche die erstern Würfe herbeygeführt werden, die Seiten

6, 5, 4, 3, 2, 1

sezt, welche die Ergänzungen der ersten zu sieben sind.

Für drey Würfel.

Ich behaupte, daß drey Würfel ihre Seiten auf $6^3 = 216$ Arten zeigen können. Wenn nämlich einer derselben irgend eine Seite zeigt, so können die beyden andern sich auf 36 Arten zeigen. Der erste Würfel aber kann jede sei-

ner sechs Seiten zeigen; folglich können die drey Würfel sich auf $6 \times 36 = 216 = 6^3$ Arten zeigen.

Der kleinste herbeyzuführende Wurf ist III, der gröste XVIII. Die Würfe, welche sich so correspondiren, daß sie zu zwey und zwey die Summe XXI machen, sind

III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X
XVIII, XVII, XVI, XV, XIV, XIII, XII, XI

und da sie paarweise auf gleich viele Arten herbeygeführt werden, indem man in den Arten, wie die ersten derselben herbeygeführt werden können, statt der Seiten

1, 2, 3, 4, 5, 6
die Seiten 6, 5, 4, 3, 2, 1 sezt; so will ich mich begnügen, die Arten aufzuzälen, wie die ersten herbeygeführt werden können.

Herbeyzuführende Würfe	Seiten, welche sie herbeyführen.	Arten, diese Seiten darzustellen	Arten die Würfe herbeyzuführen
III	1, 1, 1	1	1
IV	1, 1, 2	3	3
V	1, 1, 3 1, 2, 2	3 3	6
VI	1, 1, 4 1, 2, 3 2, 2, 2	3 6 1	10
VII	1, 1, 5 1, 2, 4 1, 3, 3 2, 2, 3	3 6 3 3	15
VIII	1, 1, 6 1, 2, 5 1, 3, 4 2, 2, 4 2, 3, 3	3 6 6 3 3	21

IX . .	1, 2, 6	. .	6	. . . 25
	1, 3, 5	. .	6	. . .
	1, 4, 4	. .	3	. . .
	2, 2, 5	. .	3	. . .
	2, 3, 4	. .	6	. . .
	3, 3, 3	. .	1	. . .
X . .	1, 3, 6	. .	6	. . . 27
	1, 4, 5	. .	6	. . .
	2, 2, 6	. .	3	. . .
	2, 3, 5	. .	6	. . .
	2, 4, 4	. .	3	. . .
	3, 3, 4	. .	3	. . .

Anzahl der Arten, die Würfe III . . . X herbeyzuführen, . . 103
das doppelte dieser Summe 216

Für vier Würfe.

Ich behaupte, daß vier Würfel sich auf soviel Arten darstellen können, als die Zahl $6^4 = 1296$ angibt. Indem nämlich einer derselben irgend eine seiner Seiten weist, können die drey andern ihre Seiten auf soviel Arten weisen, als die Zahl $6^3 = 216$ angibt. Nun kann aber der erste jede seiner sechs Seiten weisen; mithin können die vier Würfel sich auf soviel Arten zeigen, als die Zahl $6 \times 6^3 = 6^4 = 1296$ angibt.

Die Würfe

IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII
XXIV, XXIII, XXII, XXI, XX, XIX, XVIII, XVII, XVI, XV

werden je zwey und zwey auf gleich viel Arten herbeygeführt, indem man statt der Seiten 1, 2, 3, 4, 5, 6, durch welche die ersten herbeygeführt werden, die Seiten 6, 5, 4, 3, 2, 1 beziehungsweise sezt: die mittlere Zahl XIV hat keine correspondirende.

Herbeyzuführende Würfe	Seiten, welche sie herbeyführen	Arten, diese Seiten herbeyzuführen	Arten, die Würfe herbeyzuführen
IV	1, 1, 1, 1	1	1
V	1, 1, 1, 2	4	4
VI	1, 1, 1, 3	4	10
	1, 1, 2, 2	6	
VII	1, 1, 1, 4	4	20
	1, 1, 2, 3	12	
	1, 2, 2, 2	4	
VIII	1, 1, 1, 5	4	35
	1, 1, 2, 4	12	
	1, 1, 3, 3	6	
	1, 2, 2, 3	12	
	2, 2, 2, 2	1	
IX	1, 1, 1, 6	4	56
	1, 1, 2, 5	12	
	1, 1, 3, 4	12	
	1, 2, 2, 4	12	
	1, 2, 3, 3	12	
	2, 2, 2, 3	4	
X	1, 1, 2, 6	12	80
	1, 1, 3, 5	12	
	1, 1, 4, 4	6	
	1, 2, 2, 5	12	
	1, 2, 3, 4	24	
	1, 3, 3, 3	4	
	2, 2, 2, 4	4	
	2, 2, 3, 3	6	
XI	1, 1, 3, 6	12	104
	1, 1, 4, 5	12	
	1, 2, 2, 6	12	
	1, 2, 3, 5	24	
	1, 2, 4, 4	12	
	1, 3, 3, 4	12	
	2, 2, 2, 5	4	
	2, 2, 3, 4	12	
	2, 3, 3, 3	4	

XII	1, 1, 4, 6	12	125
	1, 1, 5, 5	6	
	1, 2, 3, 6	24	
	1, 2, 4, 5	24	
	1, 3, 3, 5	12	
	1, 3, 4, 4	12	
	2, 2, 2, 6	4	
	2, 2, 3, 5	12	
	2, 2, 4, 4	6	
	2, 3, 3, 4	12	
	3, 3, 3, 3	1	
XIII	1, 1, 5, 6	12	140
	1, 2, 4, 6	24	
	1, 2, 5, 5	12	
	1, 3, 3, 6	12	
	1, 3, 4, 5	24	
	1, 4, 4, 4	4	
	2, 2, 3, 6	12	
	2, 2, 4, 5	12	
	2, 3, 3, 5	12	
	2, 3, 4, 4	12	
	3, 3, 3, 4	4	
XIV	1, 1, 6, 6	6	146
	1, 2, 5, 6	24	
	1, 3, 4, 6	24	
	1, 3, 5, 5	12	
	1, 4, 4, 5	12	
	2, 2, 4, 6	12	
	2, 2, 5, 5	6	
	2, 3, 3, 6	12	
	2, 3, 4, 5	24	
	2, 4, 4, 4	4	
	3, 3, 3, 5	4	
	3, 3, 4, 4	6	

Für fünf Würfel.

Fünf Würfel können sich auf soviel Arten darstellen, als die Zahl $6^5 = 7776$ ausdrükt.

Würfe, welche paarweise auf gleichviel Arten herbeygeführt werden, und Anzahlen der Arten, sie herbey zu führen:

V, VI, VII, VIII, IX, X, XI,
XXX, XXIX, XXVIII, XXVII, XXVI, XXV, XXIV,
1, 5, 15, 35, 70, 126, 205,
XII, XIII XIV, XV, XVI, XVII
XXIII, XXII, XXI, XX, XIX, XVIII
305, 420, 540, 651, 735, 780.

Für sechs Würfel.

Würfe, welche paarweise auf gleichviel Arten herbeygeführt werden, und Arten sie herbeyzuführen:

{ VI, VII, VIII, IX, X, XI,
XXXVI, XXXV, XXXIV, XXXIII, XXXII, XXXI,
1, 6, 21, 56, 126, 252, }

{ XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII,
XXX, XXIX, XXVIII, XXVII, XXVI, XXV, XXIV,
456, 756, 1161, 1666, 2247, 2856, 3431, }

{ XIX, XX, XXI,
XXIII, XXII,
3906, 4221, 4332 }

Totalanzahl $= 6^6 = 46656$.

Untersucht man die vorhergehenden Schemata, so findet man, daß die sechs ersten Glieder einem sehr regulären Gesez folgen: nämlich, für zwey Würfel wachsen die sechs ersten Glieder wie die natürlichen Zahlen, für drey Würfel wie die Triangularzahlen; für vier wie die Pyramidalzahlen, für fünf wie die figurirten Zahlen der vierten Ordnung, für sechs wie die figurirten Zahlen der fünften Ordnung. Aber über diese Glieder hinaus erhält sich das Gesez nicht mehr in seiner Regelmässigkeit: namentlich sind die Glieder, welche auf das sechste folgen, kleiner als die fi-

rirten Zahlen der correspondirenden Ordnungen. Es ist natürlich zu untersuchen, ob diese Zahlen nicht irgend einem regelmässigen Gesez unterworfen sind.

Diese Untersuchung reducirt sich auf die Bestimmung der Anzahl der Arten, wie eine gegebene Zahl N durch Summen der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6...n, in einer bestimmten Anzahl genommen, mit Zulassung von Wiederholungen derselben Zahl in diesen Summen, hervorgebracht werden kann. Leztere Untersuchung hängt zum Theil von einigen Eigenschaften der geometrischen Progressionen ab, mit denen wir uns noch nicht beschäftigt haben: ich glaube sie daher auf eines der folgenden Kapitel verspahren zu müssen.

Zehentes Kapitel.

Entwiklung des Binomialtheorems für einen ganzen und positiven Exponenten.

§. 152.

Es sey ein Binomium $a+b$ auf eine Potenz erhoben, deren Exponent eine ganze und positive Zahl n sey. Die Bestimmung der Coefficienten der Ausdrüke, aus welchen diese Potenz besteht, steht in enger Verbindung mit den figurirten Zahlen, und folglich auch mit der Lehre von den Combinationen.

Zur Einleitung in das allgemeine Gesez dieser Coefficienten, will ich mit dem Schema einiger von diesen Potenzen anfangen.

Schema der zehen ersten Potenzen des Binomiums a+b.

1te $a+b$

2te $a^2+2ab+b^2$

3te $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

4te $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

5te $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

6te $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

7te $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$

8te $a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8$

9te $a^9+9a^8b+36a^7b^2+84a^6b^3+126a^5b^4+126a^4b^5+84a^3b^6+36a^2b^7+9ab^8+b^9$

10te $a^{10}+10a^9b+45a^8b^2+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5+210a^4b^6+120a^3b^7+45a^2b^8+10ab^9+b^{10}$

In jeder der hier entwickelten Potenzen nimmt der Exponent von a in allen auf einander folgenden Gliedern um eine Einheit ab, vom Exponenten der Potenz an bis zur Null; und der Exponent von b wächst in jedem der auf einander folgenden Glieder um eine Einheit von Null an bis zum Exponenten der Potenz selber; so daß die Zahl der Dimensionen jedes Glieds einer Potenz, oder die Anzahl ihrer Factoren, oder endlich die Summe der Exponenten von a und b dem Exponenten dieser Potenz gleich ist.

Die Coefficienten der Glieder jeder Potenz sind figurirte Zahlen. Die Coefficienten der ersten Glieder nämlich sind die Einheit.

Die Coefficienten der zweyten Glieder sind die Reyhe der natürlichen Zahlen; so daß für die nte Potenz der Coefficient des zweyten Glieds n ist.

Die Coefficienten der dritten Glieder von der zweyten Potenz $(a+b)^2$ an gerechnet, sind die Reyhe der Triangularzahlen, oder der figurirten Zahlen der zweyten Ordnung.

Mithin hat das dritte Glied der nten Potenz zum Coefficienten die (n-1)te figurirte Zahl der zweyten Ordnung, oder die (n—1)te Triangularzahl, welche ist $\frac{(n-1)n}{1.2} = \frac{n(n-1)}{1.2}$.

Die Coefficienten der vierten Glieder von der dritten Potenz (a+b) an, sind die Reyhe der Pyramidalzahlen oder der figurirten Zahlen der vierten Ordnung. Mithin hat das vierte Glied der nten Potenz zum Coefficienten die (n-2)te figurirte Zahl der dritten Ordnung, welche ist $\frac{n-2}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$.

Die Coefficienten der fünften Glieder, von der vierten Potenz $(a+b)^4$ an, sind die Reyhe der figurirten Zahlen der vierten Ordnung: folglich hat das fünfte Glied der nten Potenz zum Coefficienten die (n-3)te figurirte Zahl der vierten Ordnung, welche ist $\frac{n-3}{1}.\frac{n-2}{2}....\frac{n}{4} = \frac{n}{1}....\frac{n-3}{4}$.

Die Coefficienten der sechsten Glieder, von der fünften Potenz $(a+b)^5$ an, sind die Reyhe der figurirten Zahlen der fünften Ordnung; folglich hat das sechste Glied der nten Potenz zum Coefficienten die (n-4)te figurirte Zahl der fünften Ordnung, welche ist $\frac{n-4}{1}.....\frac{n}{5} = \frac{n}{1}....\frac{n-4}{5}$.

Allgemein sind die Coefficienten der (m+1)ten Glieder, von der mten Potenz $(a+b)^m$ an, die Reyhe der figurirten Zahlen der mten Ordnung; mithin ist das (m+1)te Glied der nten Potenz die (n-(m-1))te figurirte Zahl der mten Ordnung, welche ist $\frac{n-(m-1)}{1}.\frac{n-(m-2)}{2}....\frac{n}{m} = \frac{n}{1}....\frac{n-(m-1)}{m}$.

Um zu beweisen, daß dieses Gesez immer Statt hat, will ich beweisen, daß dasselbe, wenn es für eine gewisse Potenz gilt, auch für diejenige, deren Exponent um eine Einheit höher ist, gelte; und da es für die ersten Werthe

des

des Exponenten, wie z. B. 1, 2, 3, 4, 5 . . . gilt, so wird es für jeden folgenden Exponenten gelten.

Es sey bewiesen, daß

$$(a+b)^m =$$

$$a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2 + \frac{m}{1}\cdot\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3 + \frac{m}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m-3}{4}a^{m-4}b^4$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{m}{1}ab^{m-1} + b^m$$

Multiplicirt man auf beyden Seiten dieser Gleichung mit $a+b$, so erhält man

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} +$$
$$\frac{m}{1}a^m b + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-1}b^2 + \frac{m}{1}\cdot\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-2}b^3 + \frac{m}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m-3}{4}a^{m-3}b^4 \ldots\ldots$$
$$+ \frac{m}{1}a^2b^{m-1} + ab^m$$
$$+ a^m b + \frac{m}{1}a^{m-1}b^2 + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^3 + \frac{m}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^4 \ldots\ldots$$
$$+ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^2b^{m-1} + \frac{m}{1}ab^m + b^{m+1}$$
$$= a^{m+1}$$
$$+ \frac{m+1}{1}a^m b + \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m}{2}a^{m-1}b^2 + \frac{m+1}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{m-1}{3}a^{m-2}b^3 + \frac{m+1}{1}\cdot\cdot$$
$$\frac{m-2}{4}a^{m-3}b^4 + \ldots + \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m}{2}a^2b^{m-1} + \frac{m+1}{1}ab^m + b^{m+1}$$

Nämlich die Coefficienten der Glieder der Potenz, deren Exponent $m+1$ ist, sind die Summen der Coefficienten zweyer auf einander folgenden Glieder der Potenz, deren Exponent m ist. Da in der Potenz, deren Exponent m ist, die Glieder

$$a^{m-p}b^p \quad a^{m-p-1}b^{p+1}$$

zu Coefficienten haben

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{m-(p-1)}{p} \quad \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{m-p}{p+1};$$

so hat in der Potenz, deren Exponent $m+1$ ist, das Glied $a^{m-p-1}b^p$ zum Coefficienten die Summe

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{m-(p-1)}{p} \\ + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{m-p}{p+1} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{m-(p-1)}{p}\left(1+\frac{m-p}{p+1}\right)$$

$$= \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{m-(p-1)}{p} \cdot \frac{m+1}{p+1}$$

$$= \frac{m+1}{1} \cdot \frac{m}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{m+1-p}{p+1}$$

Man hat daher allgemein

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2 + \frac{m}{1}\ldots\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3 + \ldots$$
$$+ \frac{m}{1}\ldots\frac{m-(p-1)}{p}a^{m-p}b^p + \ldots + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^2b^{m-2} + \frac{m}{1}ab^{m-1} + b^m$$

§. 153.

Aendert man das Zeichen von b, so daß man $(a-b)^m$ zu entwickeln hat; so ändern die ungeraden Potenzen von b ihr Zeichen, die geraden Potenzen von b aber behalten es: man hat demnach

für ein gerades m

$$(a-b)^m = a^m - \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2 - \frac{m}{1}\ldots\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3 \ldots$$
$$+ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^2b^{m-2} - \frac{m}{1}ab^{m-1} + b^m$$

für ein ungerades m

$$(a-b)^m = a^m - \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2 - \frac{m}{1}\ldots\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3 \ldots$$
$$- \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^2b^{m-2} + \frac{m}{1}ab^{m-1} - b^m$$

oder

$$(a-b)^m = a^m - \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2 - \frac{m}{1}\ldots\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3 \ldots$$
$$\pm\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^2b^{m-2} \mp \frac{m}{1}ab^{m-1} \pm b^m$$

je nachdem m $\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}$ ist.

Zusaz. 1°. Es sey m gerade: so ist

$$\frac{(a+b)^m+(a-b)^m}{2} =$$

$$a^m + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2 + \frac{m}{1}\cdots\frac{m-3}{4}a^{m-4}b^4 + \cdots + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^2b^{m-2} + b^m;$$

$$\frac{(a+b)^m-(a-b)^m}{2} =$$

$$\frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m-1}{1}\cdots\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3 + \frac{m}{1}\cdots\frac{m-4}{5}a^{m-5}b^5 + \cdots + \frac{m}{1}\cdots\frac{m-2}{3}a^3b^{m-3} + \frac{m}{1}ab^{m-1}$$

2°. Es sey m ungerade: so ist

$$\frac{(a+b)^m+(a-b)^m}{2} =$$

$$a^m + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2 + \frac{m}{1}\cdots\frac{m-3}{4}a^{m-4}b^4 + \cdots + \frac{m}{1}\cdots\frac{m-2}{3}a^3b^{m-3} + \frac{m}{1}ab^{m-1};$$

$$\frac{(a+b)^m-(a-b)^m}{2} =$$

$$\frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3 + \frac{m}{1}\cdots\frac{m-4}{5}a^{m-5}b^5 + \cdots + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^2b^{m-2} + b^m$$

§. 154.

Anmerkung. Wenn man die Tafel der figurirten Zahlen (§. 140.) ansieht; so findet man darinnen die Coefficienten der Glieder des Binomiums diagonal geordnet.

Nämlich die Coefficienten 1, 1 von (a+b) befinden sich daselbst als die zweyten Glieder der ersten verticalen, und der ersten horizontalen Reyhe.

Die Coefficienten 1, 2, 1 von $(a+b)^2$ befinden sich in der Diagonale, welche die dritten Glieder der beyden ersten Horizontal- und Vertical-Reyhen verbindet.

Die Coefficienten 1, 3, 3, 1 von $(a+b)^3$ befinden sich in der Diagonale, welche die vierten Glieder der beyden ersten Horizontal- und Vertical-Reyhen verbindet.

Die Coefficienten 1, 4, 6, 4, 1 von $(a+b)^4$ befinden sich in der Diagonale, welche die fünften Glieder der beyden ersten Horizontal- und Vertical-Reyhen verbindet.

Und allgemein befinden sich die Coefficienten von $(a+b)^m$ in der Diagonale, welche die $(m+1)$ten Glieder der beyden ersten Horizontal- und Vertical-Reyhen verbindet.

§. 155.

Die Coefficienten des auf eine Potenz, deren Exponent m ist, erhöhten Binomiums $a+b$ stehen in enger Verbindung mit den Zahlen, welche angeben, auf wieviel Arten m Buchstaben von zwey verschiedenen Namen, deren Zahlen durch die Exponenten von a und b in dieser Potenz angezeigt werden, angeordnet werden können.

Erstes Glied der Potenz ... a^m: der Coefficient 1 zeigt an, auf wieviel Arten m Buchstaben von einerley Namen angeordnet werden können.

Zweytes Glied der Potenz ... $m\,a^{m-1}b$: der Coefficient m zeigt an, auf wieviel Arten m Buchstaben, wovon m-1 einen Namen, und einer einen andern hat, angeordnet werden können.

Drittes Glied der Potenz ... $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2$: der Coefficient $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}$ zeigt an, auf wieviel Arten m Buchstaben, wovon m - 2 einen Namen, und zwey einen andern haben, angeordnet werden können.

Viertes Glied der Potenz ..... $\frac{m}{1}\ldots\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3$: der Coefficient $\frac{m}{1}\ldots\frac{m-2}{3}$ zeigt an, auf wieviel Arten m Buchstaben, wovon m - 3 einen Namen, und drey einen andern haben, angeordnet werden können.

Fünftes Glied der Potenz ..... $\frac{m}{1}\ldots\ldots\frac{m-3}{4}a^{m-4}b^4$: der Coefficient $\frac{m}{1}\ldots\frac{m-3}{4}$ zeigt an, auf wieviel Arten m Buch-

staben, wovon m-4 einen Namen, und vier einen andern haben, angeordnet werden können.

. . .

. . .

(r+1)tes Glied der Potenz ..... $\frac{m}{1}$ ... $\frac{m-(r-1)}{r} a^{m-r} b^{r}$:

der Coefficient $\frac{m}{1}$ .... $\frac{m-(r-1)}{r}$ gibt an, auf wieviel Arten m Buchstaben, wovon m-r einen Namen, und r einen andern haben, angeordnet werden können.

Man kann von dieser Verbindung auf folgende Art Rechenschaft geben. So wie im Binomium die Coefficienten der Potenz, deren Exponent m+1 ist, durch die Addition der Coefficienten zweyer auf einander folgenden Glieder der Potenz, deren Exponent m ist, entstehen: so ist die Zahl, welche angibt, auf wieviel Arten m+1 Buchstaben angeordnet werden können, wovon r+1 einen Namen, und m-r einen andern haben, die Summe der Zahlen, welche angeben, auf wieviel Arten m Buchstaben, wovon r einen Namen, und m-r einen andern haben, und auf wieviel Arten m Buchstaben, wovon r+1 einen Namen, und m-r-1 einen andern haben, angeordnet werden können.

Mithin hätten die Coefficienten der Potenzen des Binomiums durch die Lehre von den Combinationen erhalten werden können. So führt diese Lehre auf eine sehr lichtvolle Art zur Bestimmung der Coefficienten der Polynomien; was ich nun durch einige Beyspiele entwickeln will.

§. 156.

Erstes Beyspiel. Es sey das Binomium a+b+c, wovon man das Quadrat nehmen soll. Dieses Quadrat wird aus allen Produkten zu zwo Dimensionen aus den Buchstaben a, b, c bestehen, nämlich aus ihren Quadraten und aus ihren Producten zu zwey und zwey: die Coefficienten der Quadrate sind die Einheit, und die Coefficienten der aus zwey verschiedenen Buchstaben zusammengesezten Produkte sind der Zahl gleich, welche angibt, auf wieviel Arten zwey verschiedene Buchstaben angeordnet werden können; näm-

lich 2. Man hat demnach $(a+b+c)^2 = aa+2ab+bb+2ac+cc+2bc$

Diese Regel ist auf das Quadrat eines jeden Polynomiums anwendbar.

Zweytes Beyspiel. Es sey das Trinomium a, b, c, wovon man den Cubus nehmen soll. Dieser Cubus besteht aus allen Produkten zu drey Dimensionen von den Buchstaben a, b, c; nämlich aus ihren Würfeln, aus den Producten des Quadrats eines jeden durch die beyden andern, und aus dem continuirlichen Product dieser drey Buchstaben. Die Würfel haben zum Coefficienten die Einheit: die Producte des Quadrats einer der Größen durch eine andere haben zum Coefficienten 3, welches die Anzahl der Arten ist, auf welche man drey Buchstaben, wovon zwey einerley Namen haben, anordnen kann; und das continuirliche Product hat zum Coefficienten 6, welches die Anzahl der Arten ist, auf welche man drey verschiedene Buchstaben anordnen kann. Man hat demnach

$$(a+b+c)^3 = a^3+3aab+3abb+3aac+6abc+3acc+b^3+3bbc+3bcc+c^3.$$

Diese Regel gilt für den Cubus jedes Polynomiums.

Drittes Beyspiel. Es sey das Quadrinomium a+b+c+d, wovon man die vierte Potenz nehmen soll.

Diese Potenz besteht aus allen Producten der Buchstaben a, b, c, d zu vier Dimensionen: nämlich aus ihren vierten Potenzen, welche zu Coefficienten die Einheit haben; aus den Producten der Würfel eines jeden in die andern; welche zu Coefficienten 4 haben; aus den Producten der Quadrate eines jeden in die Quadrate der andern; welche zu Coefficienten 6 haben; aus den Producten der Quadrate eines jeden durch das Product der beyden andern; welche zu Coefficienten 12 haben; und aus dem continuirlichen Product der vier Größen, welches 24 zum Coefficienten hat.

Man hat demnach $(a+b+c+d)^4 =$

$$\left.\begin{array}{l} a^4+4a^3b \\ \quad 4a^3c \\ \quad 4a^3d \end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{l} 6aabb \\ 12aabc \\ 12aabd \\ \quad 6aacc \\ 12aacd \\ \quad 6aadd \end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{l} 4ab^3 \\ 12abbc \\ 12abbd \\ 12abcc \\ 24abcd \\ 12abdd \\ \quad 4ac^3 \\ 12accd \\ 12acdd \\ \quad 4ad^3 \end{array}\right\}+\left.\begin{array}{l} b^4+4b^3c \\ \quad 4b^3d \end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{l} 6bbcc \\ 12bbcd \\ \quad 6bbdd \end{array}\right\}$$

$$+\left.\begin{array}{l} 4bc^3 \\ 12bccd \\ 12bcdd \\ \quad 4bd^3 \end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{l} 1c^4 \\ \quad 4c^3d \\ \quad 6ccdd \\ \quad 4cd^3 \\ \quad 1d^4 \end{array}\right.$$

Diese Regel gilt für die vierte Potenz jedes Polynomiums.

Allgemein. Die mte Potenz jedes Polynomiums besteht aus allen Producten zu m Dimensionen, welche man mit den Gliedern des Polynomiums und mit den Potenzen derselben, deren Exponenten nicht größer als m sind, machen kann.

Beyspiel. $(a+b+c+d)^m =$

$$\left.\begin{array}{l} a^m \\ +\frac{m}{1}a^{m-1}b \\ \frac{m}{1}a^{m-1}c \\ \frac{m}{1}a^{m-1}d \end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{l} \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2 \\ 2\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}bc \\ 2\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}bd \\ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}cc \\ 2\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}cd \\ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}dd \end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{l} \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3 \\ 3\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}bbc \\ 3\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}bbd \\ 3\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}bcc \\ 6\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}bcd \\ 3\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}bdd \\ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}c^3 \\ 3\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}ccd \\ 3\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}cdd \\ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}d^3 \end{array}\right\}+\ldots$$

Eilftes Kapitel.

Entwiklung des Binomialtheorems für jeden Exponenten.

§. 157.

Die im vorhergehenden Kapitel vorgetragene Entwiklung des Binomialtheorems ist auf die Eigenschaften der figurirten Zahlen gegründet, und nur auf den Fall anwendbar, wo der Exponent eine ganze und positive Zahl ist. Inzwischen haben mehrere Schriftsteller, und namentlich Newton, die nämliche Formel auf jeden Exponenten, nicht nur auf einen ganzen und positiven, sondern auch auf einen gebrochenen, und in beyden Fällen positiven oder negativen angewendet. Aber die meisten dieser Schriftsteller, und Newton selbst, sind zu dieser Anwendung mehr durch Analogie als durch einen strengen Beweis, wofür jene doch nicht gelten kann, geleitet werden; und die meisten elementarischen Beweise, welche man von diesem so ausgedehnten Theorem gegeben hat, halten keine strenge Prüfung aus. Und doch ist dieses verallgemeinte Theorem wichtig genug, um eine elementarische Feststellung desselben auf haltbaren Gründen wünschen zu lassen. Folgender mit dem von Segner in den Memoires von Berlin 1777 gegebenen übereinstimmender Beweis scheint mir die genannte Eigenschaft zu besizen; und ich finde mich dadurch veranlaßt, denselben hier unter der nämlichen Form zu wiederholen, unter der ich ihn in meinem Werk betitelt: Principiorum Calculi differentialis et integralis expositio elementaris. Tubingæ 1795, vorgetragen habe.

§. 158.

Lehrsaz. Es seyen a und b, n und n' Größen, was

man für will, und die Größen P und P' dergestalt bestimmt:

$$P = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}\cdots\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}\cdots\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 + \frac{n}{1}\cdot\cdot\frac{n-4}{5}a^{n-5}b^5 + \cdots$$

$$P' = a^{n'} + \frac{n'}{1}a^{n'-1}b + \frac{n'}{1}\cdot\frac{n'-1}{2}a^{n'-2}b^2 + \frac{n'}{1}\cdots\frac{n'-2}{3}a^{n'-3}b^3 + \frac{n'}{1}\cdots\frac{n'-3}{4}a^{n'-4}b^4 + \frac{n'}{1}\cdots\frac{n'-4}{5}a^{n'-5}b^5 + \cdots$$

Ich behaupte, daß das Produkt dieser beyden Größen die nämliche Form wie jede derselben habe, indem man $n+n'$ statt n oder n' substituirt; nämlich

$$PP' = a^{n+n'} + \frac{n+n'}{1}a^{n+n'-1}b + \frac{n+n}{1}\cdot\frac{n+n'-1}{2}a^{n+n'-2}b^2 + \frac{n+n'}{1}\cdot\cdot\frac{n+n'-2}{3}a^{n+n'-3}b^3 + \frac{n+n'}{1}\cdots\frac{n+n'-3}{4}a^{n+n'-4}b^4 + \frac{n+n'}{1}\cdots\frac{n+n'-4}{5}a^{n+n'-5}b^5 + \cdots$$

Beweis. Die Exponenten von a im Produkt folgen einer abnehmenden arithmetischen Progression, deren erstes Glied $n+n'$, und bey welcher die Differenz der auf einander folgenden Glieder die Einheit ist. Die Exponenten von b folgen der arithmetischen Progression der natürlichen Zahlen von der Einheit an. Nun ist noch das Gesez der Coefficienten zu bestimmen übrig.

1°. Der Coefficient des ersten Glieds ist die Einheit.

2°. Der Coefficient des zweyten Glieds ist $\frac{n}{1}+\frac{n'}{1}=\frac{n+n'}{1}$

3°. Der Coefficient des dritten Glieds ist

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2} \\ +\frac{n}{1}\cdot\frac{n'}{1} \\ +\frac{n'}{1}\cdot\frac{n'-1}{2} \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{l} \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2} \\ +2\frac{n}{1}\cdot\frac{n'}{2} \\ +\frac{n'}{1}\cdot\frac{n'-1}{2} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n'}{2} \\ +\frac{n}{1}\cdot\frac{n'}{2}+\frac{n'}{1}\cdot\frac{n'-1}{2} \end{array}\right\}$$

$$= \left.\begin{array}{l} \frac{n}{1}\cdot\frac{n+n'-1}{2} \\ +\frac{n'}{1}\cdot\frac{n+n'-1}{2} \end{array}\right\} = \frac{n+n'}{1}\cdot\frac{n+n'-1}{2}$$

4°. Der Coefficient des vierten Glieds ist

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3} \\ +\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n'}{1} \\ +\frac{n}{1}\cdot\frac{n'}{1}\cdot\frac{n'-1}{2} \\ +\frac{n'}{1}\cdot\frac{n'-1}{2}\cdot\frac{n'-2}{3} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3} \\ +3\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n'}{3} \\ +3\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n'}{2}\cdot\frac{n'-1}{3} \\ +\frac{n'}{1}\cdot\frac{n'-1}{2}\cdot\frac{n'-2}{3} \end{array}\right.$$

$$= \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n'}{3} + 2\left(\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n'}{3} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n'}{2}\cdot\frac{n'-1}{3}\right) + \frac{n}{1}\cdot\frac{n'}{2}\cdot\frac{n'-1}{3} + \frac{n'}{1}\cdot\frac{n'-1}{2}\cdot\frac{n'-2}{3}$$

$$= -\frac{n+n'-2}{3}\times\left\{\begin{array}{l} \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2} \\ +2\,\frac{n}{1}\cdot\frac{n'}{2} \\ +\frac{n}{1}\cdot\frac{n'-1}{2} \end{array}\right\} = \frac{n+n'-2}{3}\cdot\frac{n+n'}{1}\cdot\frac{n+n'-1}{2} \text{ (vermöge 3°.)}$$

$$= -\frac{n+n'}{3}\cdot\frac{n+n'-1}{2}\cdot\frac{n+n'-2}{3}$$

5°. Der Coefficient des fünften Glieds ist

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n}{1}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{n-3}{4} \\ +\frac{n}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n'}{1} \\ +\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n'}{1}\cdot\frac{n'-1}{2} \\ +\frac{n}{1}\cdot\frac{n'}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{n'-2}{3} \\ +\frac{n'}{1}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{n'-3}{4} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \frac{n}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{n-3}{4} \\ +4\cdot\frac{n}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n'}{4} \\ +6\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n'}{3}\cdot\frac{n'-1}{4} \\ +4\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n'}{2}\cdot\cdot\cdot\frac{n'-2}{4} \\ +1\cdot\frac{n'}{1}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{n'-3}{4} \end{array}\right.$$

$$= -\frac{n+n'-3}{4}\times\left\{\begin{array}{l} \frac{n}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{n-2}{3} \\ +3\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n'}{3} \\ +3\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n'}{2}\cdot\frac{n'-1}{3} \\ +\frac{n'}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{n'-3}{3} \end{array}\right.$$

$$= \frac{n+n'-3}{4} \cdot \frac{n+n'}{1} \cdot \frac{n+n'-1}{2} \cdot \frac{n+n'-2}{3} \text{ (vermöge 4°.)}$$

$$= \frac{n+n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n+n'-3}{4}$$

6. Der Coefficient des sechsten Glieds ist

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-4}{5} \\ + \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \frac{n'}{1} \\ + \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n'}{1} \cdot \frac{n'-1}{2} \\ + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n'}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n'-2}{3} \\ + \frac{n}{1} \cdot \frac{n'}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n'-3}{4} \\ + \frac{n'}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n'-4}{5} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-4}{5} \\ + 5\frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \frac{n'}{5} \\ + 10\frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n'}{4} \cdot \frac{n'-1}{5} \\ + 10\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n'}{3} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n'-2}{5} \\ + 5\frac{n}{1} \cdot \frac{n'}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n'-3}{5} \\ + \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n'-4}{5} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{n+n'-4}{5} \times \left\{\begin{array}{l} \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-3}{4} \\ + 4\frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n'}{4} \\ + 6\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n'}{3} \cdot \frac{n'-1}{4} \\ + 4\frac{n}{1} \cdot \frac{n'}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n'-2}{4} \\ + \frac{n'}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n'-3}{4} \end{array}\right.$$

$= \frac{n+n'-4}{5} \times \frac{n+n'}{1} \cdots \frac{n+n'-3}{4}$ (vermöge 5°.)

$= \frac{n+n'}{1} \cdots \frac{n+n'-4}{5}$.

Diese Beyspiele sind hinlänglich, um den Gang des allgemeinen Beweises begreiflich zu machen. Wenn nämlich das Gesez der Coefficienten für irgend ein Glied, wie für das mte, als gültig bewiesen worden ist; so behaupte ich, daß es auch für das folgende oder (m+1)te Glied gelte.

Ich habe demnach zu beweisen, daß, wenn der Coefficient des mten Glieds $\cdots \frac{n+n'}{1} \cdot \frac{n+n'-1}{2} \cdots \frac{n+n'-(m-2)}{m-1}$ ist, der Coefficient des (m+1)ten $\frac{n+n'}{1} \cdot \frac{n+n'-1}{2} \cdots \frac{n+n'-(m-1)}{m}$ sey.

Wirklich ist der Coefficient des (m+1)ten Glieds

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-(m-1)}{m} \cdots \cdots \\
+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-(m-2)}{m-1} \times \frac{n'}{1} \cdots \cdots \\
+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-(m-3)}{m-2} \times \frac{n'}{1} \cdot \frac{n'-1}{2} \\
+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-(m-4)}{m-3} \times \frac{n'}{1} \cdots \frac{n'-2}{3} \\
+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-(m-5)}{m-4} \times \frac{n'}{1} \cdots \frac{n'-3}{4} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \\
+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \times \frac{n'}{1} \cdots \cdots \frac{n'-(m-3)}{m-2} \\
+ \frac{n}{1} \times \frac{n'}{1} \cdots \cdots \cdots \frac{n'-(m-2)}{m-1} \\
+ \frac{n'}{1} \cdot \frac{n'-1}{1} \cdots \cdots \cdots \frac{n'-(m-1)}{m}
\end{array}\right\} \times \frac{n+n'}{5} \cdots$$

$$
\begin{aligned}
= \Big\{ & \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\cdots\cdots\frac{n-(m-1)}{m} \\
& + \frac{m}{1}\times\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\cdots\frac{n-(m-2)}{m-1}\times\frac{n'}{m} \\
& + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\times\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-(m-3)}{m-2}\times\frac{n'}{m-1}\cdot\frac{n'-1}{m} \\
& + \frac{m}{1}\cdots\frac{m-2}{3}\times\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-(m-4)}{m-3}\times\frac{n'}{m-2}\cdots\frac{n'-2}{m} \\
& + \frac{m}{1}\cdots\frac{m-3}{4}\times\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-(m-5)}{m-4}\times\frac{n'}{m-3}\cdots\frac{n'-3}{m} \\
& \quad\cdot\qquad\cdot \\
& \quad\cdot\qquad\cdot \\
& \quad\cdot \\
& + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\times\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\times\frac{n'}{3}\cdots\cdots\frac{n'-(m-3)}{m} \\
& + \frac{m}{1}\times\frac{n}{1}\times\frac{n'}{2}\cdot\frac{n'-1}{3}\cdots\cdots\frac{n'-(m-2)}{m} \\
& + \frac{n'}{1}\cdot\frac{n'-2}{2}\cdots\cdots\frac{n'-(m-1)}{m} \Big\} \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \frac{n+n'-(m-1)}{m}\times\Big\{ & \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-(m-2)}{m-1} \\
& + \frac{m-1}{1}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-(m-3)}{m-2}\cdot\frac{n'}{m-1} \\
& + \frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-(m-4)}{m-3}\cdot\frac{n'}{m-2}\cdot\frac{n'-1}{m-1} \\
& + \frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-3}{3}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-(m-5)}{m-4}\cdot\frac{n'}{m-3}\cdots\frac{n'-2}{m-1} \\
& \quad\cdot\qquad\cdot \\
& \quad\cdot\qquad\cdot \\
& \quad\cdot \\
& + \frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n'}{3}\cdot\frac{n'-1}{4}\cdots\frac{n'-(m-4)}{m-1} \\
& + \frac{m-1}{1}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n'}{2}\cdot\frac{n'-1}{3}\cdots\cdots\frac{n'-(m-3)}{m-1} \\
& + \frac{n'}{1}\cdot\frac{n'-1}{2}\cdots\cdots\frac{n'-(m-2)}{m-1} \Big\}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{n+n'-(m-1)}{m} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \cdot \cdot \frac{n-(m-2)}{m-1} \\ + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \cdot \cdot \frac{n-(m-3)}{m-2} \times \frac{n'}{1} \\ + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \cdot \cdot \frac{n-(m-4)}{m-3} \times \frac{n'}{1} \cdot \frac{n'-1}{2} \\ + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \cdot \cdot \frac{n-(m-5)}{m-4} \times \frac{n'}{1} \cdot \cdot \frac{n'-2}{3} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n'}{1} \cdot \frac{n'-1}{2} \cdot \cdot \cdot \frac{n'-(m-4)}{m-3} \\ + \frac{n}{1} \cdot \frac{n'}{1} \cdot \frac{n'-1}{2} \cdot \cdot \cdot \frac{n'-(m-3)}{m-2} \\ + \frac{n'}{1} \cdot \frac{n'-1}{2} \cdot \cdot \cdot \frac{n'-(m-2)}{m-1} \end{array} \right.$$

$$= \frac{n+n'}{1} \cdot \frac{n+n'-1}{2} \cdot \frac{n+n'-2}{3} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n+n'-(m-2)}{m-1} \cdot \frac{n+n'-(m-1)}{m}$$

(vermöge der Vorausſezung).

Wenn mithin das Geſez der Coefficienten für irgend ein Glied des Produkts Statt hat, ſo hat es auch für das folgende Glied Statt. Nun iſt aber dis Geſez für die Coefficienten des zweyten, dritten, vierten, fünften, ſechsten Glieds gültig bewieſen worden: folglich gilt es auch für das ſiebente; daher auch für das achte, ſodenn für das neunte, und ſo fort für alle folgende Coefficienten nacheinander.

§. 159.

Erſte Anwendung.

1°. Das Quadrat einer Größe von der Form

$$a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 + \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4 + \cdot \cdot \cdot$$

iſt

$$a^{2n} + \frac{2n}{1} a^{2n-1} b + \frac{2n}{1} \cdot \frac{2n-1}{2} a^{2n-2} b^2 + \frac{2n}{1} \cdot \cdot \cdot \frac{2n-2}{3} a^{2n-3} b^3 + \frac{2n}{1} \cdot \cdot \cdot \frac{2n-3}{4} a^{2n-4} b^4 + \cdot \cdot \cdot$$

2°. Daher ist der Cubus dieser nämlichen Größe

$$a^{3n} + \frac{3n}{1}a^{3n-1}b + \frac{3n}{1}\cdot\frac{3n-1}{2}a^{3n-2}b^2 + \frac{3n}{1}\cdots\frac{3n-2}{3}a^{3n-3}b^3 + \frac{3n}{1}\cdots\frac{3n-3}{4}a^{3n-4}b^4\cdots$$

3°. Daher ist ferner die vierte Potenz derselben Größe

$$a^{4n} + \frac{4n}{1}a^{4n-1}b + \frac{4n}{1}\cdot\frac{4n-1}{2}\cdot a^{4n-2}b^2 + \frac{4n}{1}\cdots\frac{4n-2}{3}a^{4n-3}b^3 + \frac{4n}{1}\cdots\frac{4n-3}{4}a^{4n-4}b^4 + \cdots$$

Und allgemein, wenn m irgend eine ganze und positive Zahl ist, ist die mte Potenz dieser Größe

$$a^{mn} + \frac{mn}{1}a^{mn-1}b + \frac{mn}{1}\cdot\frac{mn-1}{2}a^{mn-2}b^2 + \frac{mn}{1}\cdot\frac{mn-2}{3}a^{mn-3}b^3 + \frac{mn}{1}\cdots\frac{mn-3}{4}a^{mn-4}b^4 + \cdots$$

§. 160.

Zweyte Anwendung. Umgekehrt: Sey m irgend eine ganze und positive Zahl; so ist die mte Wurzel der Größe

$$a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}\cdots\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 + \cdots$$

folgende

$$a^{\frac{n}{m}} + \frac{\frac{n}{m}}{1}a^{\frac{n}{m}-1}b + \frac{\frac{n}{m}}{1}\cdot\frac{\frac{n}{m}-1}{2}a^{\frac{n}{m}-2}b^2 + \frac{\frac{n}{m}}{1}\cdot\frac{\frac{n}{m}-2}{3}a^{\frac{n}{m}-3}b^3 + \frac{\frac{n}{m}}{1}\cdots\frac{\frac{n}{m}-3}{4}a^{\frac{n}{m}-4}b^4 + \cdots$$

Denn vermöge der ersten Anwendung ist die erste Größe die mte Poten der zweyten; mithin umgekehrt die zweyte Größe die mte Wurzel der ersten.

§. 161.

Dritte Anwendung. Es seyen m und n zwey ganze und positive Zahlen; ich behaupte, daß

$$(a+b)^{\frac{n}{m}} =$$

$$a^{\frac{n}{m}} + \frac{\frac{n}{m}}{1} a^{\frac{n}{m}-1} b + \frac{\frac{n}{m}}{1} \cdot \frac{\frac{n}{m}-1}{2} a^{\frac{n}{m}-2} b^2 + \frac{\frac{n}{m}}{1} \cdot \frac{\frac{n}{m}-1}{2} \cdot \frac{\frac{n}{m}-2}{3} a^{\frac{n}{m}-3} b^3 + \frac{\frac{n}{m}}{1} \cdot \frac{\frac{n}{m}-1}{2} \cdot \frac{\frac{n}{m}-2}{3} \cdot \frac{\frac{n}{m}-3}{4} a^{\frac{n}{m}-4} b^4 + \ldots$$

Denn es ist $(a+b)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{(a+b)^n}$

$$= \sqrt[m]{\left(a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4 + \ldots\right)} \text{ (nach §. 159)}$$

$$= a^{\frac{n}{m}} + \frac{\frac{n}{m}}{1} a^{\frac{n}{m}-1} b + \frac{\frac{n}{m}}{1} \cdot \frac{\frac{n}{m}-1}{2} a^{\frac{n}{m}-2} b^2 + \frac{\frac{n}{m}}{1} \cdot \frac{\frac{n}{m}-1}{2} \cdot \frac{\frac{n}{m}-2}{3} a^{\frac{n}{m}-3} b^3 + \frac{\frac{n}{m}}{1} \cdot \frac{\frac{n}{m}-1}{2} \cdot \frac{\frac{n}{m}-2}{3} \cdot \frac{\frac{n}{m}-3}{4} a^{\frac{n}{m}-4} b^4 + \ldots \text{ (nach §. 160)}$$

§. 162.

Recapitulation der drey vorhergehenden Anwendungen:

Es sey n irgend eine positive rationale, ganze oder gebrochene Zahl: so ist

$$(a+b)^n =$$

$$a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4 + \ldots$$

§. 163.

Lehrsaz. Es seyen zwey Größen P und P' so beschaffen, daß

P =

$$P = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}\cdot\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}\cdot\cdot\cdot \frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 + \cdot\cdot\cdot$$

$$P' = a^{-n} + \frac{-n}{1}a^{-n-1}b + \frac{-n}{1}\cdot\frac{-n-1}{2}a^{-n-2}b^2 + \frac{-n}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{-n-2}{3}a^{-n-3}b^3 + \frac{-n}{1}\cdot\cdot\cdot \frac{-n-3}{4}a^{-n-4}b^4 + \cdot\cdot\cdot$$

$$= \frac{1}{a^n} - \frac{n}{1}\frac{b}{a^{n+1}} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\frac{b^2}{a^{n+2}} - \frac{n}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{n+2}{3}\frac{b^3}{a^{n+3}} + \frac{n}{1}\cdot\cdot\cdot \frac{n+3}{4}\frac{b^4}{a^{n+4}} - \cdot\cdot\cdot$$

Das Product dieser beyden Grösßen reducirt sich auf das erste Glied $a^n \times a^{-n} = a^n \times \frac{1}{a^n} = 1$; indem die Coefficienten der folgenden Glieder den Factor $n - n = 0$ enthalten.

Zusaz.

$$a^{-n} + \frac{-n}{1}a^{-n-1}b + \frac{-n}{1}\cdot\frac{-n-1}{2}a^{-n-2}b^2 + \frac{-n}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{-n-2}{3}a^{-n-3}b^3 + \frac{-n}{1}\cdot\cdot\cdot \frac{-n-3}{4}a^{-n-4}b^4 + \cdot\cdot\cdot$$

$$= \frac{1}{a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}\cdot\cdot\cdot \frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 + \cdot\cdot\cdot}$$

$= \frac{1}{(a+b)^n}$ (§. 162), indem n irgend eine rationale positive Zahl bedeutet.

Demnach ist $\frac{1}{(a+b)^n} =$

$$a^{-n} + \frac{-n}{1}a^{-n-1}b + \frac{-n}{1}\cdot\frac{-n-1}{2}\cdot a^{-n-2}b^2 + \frac{-n}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{-n-2}{3}a^{-n-3}b^3 + \frac{-n}{1}\cdot\cdot\cdot \frac{-n-3}{4}a^{-n-4}b^4 + \cdot\cdot\cdot$$

$$= \frac{1}{a^n} - \frac{n}{1}\frac{b}{a^{n+1}} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\times\frac{b^2}{a^{n+2}} - \frac{n}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{n+2}{3}\times\frac{b_3}{a^{n+3}} + \frac{n}{1}\cdot\cdot\cdot \frac{n+3}{4}\times\frac{b^4}{a^{n+4}} - \cdot\cdot\cdot$$

Mithin gilt das Gesez, welches für positive rationale Zahlen Statt hat, auch für negative rationale.

Anmerkung. Was die irrationalen Exponenten betrift; so kann man, da man sich durch Wurzelausziehung dem Werth derselben in rationalen Größen immer mehr nähern kann, so daß diese genäherte rationale Ausdrüke von den irrationalen Größen um weniger als um eine gegebene Größe unterschieden seyen, das für jede rationale Exponenten bewiesene auch auf irrationale Exponenten anwenden.

Uebrigens muß man bemerken, daß die Anwendung der über rationale Exponenten festgesezten Regeln auf Größen, welche von irrationalen Exponenten afficirt sind, sich einzig und allein auf Analogie gründet. Und dis gilt noch viel mehr von imaginären Exponenten: welche als blosse durch Induktion, der Leichtigkeit und Allgemeinheit des Calculs wegen, eingeführte Zeichen anzusehen sind.

§. 164.

Wenn man den Ausdruk $(a+b)^n$ auf eine Reyhe bringt; so bricht die Reyhe, welche man erhält, nur in dem Fall ab, wenn n eine ganze und positive Zahl ist; und alsdenn ist die vollständige Reyhe dem Werth der zu entwikkelnden Größe gleich.

In den übrigen Fällen bricht die Reyhe nicht ab; und wenn sie sich dem Werth der zu entwickelnden Größe um so mehr nähern soll, je mehr man Glieder von derselben nimmt; so muß a größer als b seyn.

Beyspiel. $\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} + \frac{\frac{b}{a}}{a-b}$

$$= \frac{1}{a} + \frac{b}{aa} + \frac{\frac{bb}{aa}}{a-b}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{b}{aa} + \frac{bb}{a^3} + \frac{\frac{b^3}{a^3}}{a-b}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{b}{aa} + \frac{bb}{a^3} + \frac{b^3}{a^4} + \frac{\frac{b^4}{4}}{a-b}$$

.

.

.

$$= \frac{1}{a} + \frac{b}{aa} + \frac{bb}{a^3} + \frac{b^3}{a^4} + \ldots\ldots + \frac{b^m}{a^{m+1}} + \frac{\frac{b^{m+1}}{a^{m+1}}}{a-b}$$

Wenn a größer als b ist; so wird die Ergänzung $\frac{\frac{b^{m+1}}{a^{m+1}}}{a-b}$ desto kleiner, je größer die Anzahl der entwickelten Glieder ist; so daß die Abnahme dieser Ergänzung keine Gränze hat. In diesem Fall hat mithin die Reyhe $\frac{1}{a} + \frac{b}{aa} + \frac{bb}{a^3} + \frac{b^3}{a^4} + \ldots\ldots$ eine Gränze ihrer Größe, welche $\frac{1}{a-b}$ ist; und in diesem figürlichen und zur Anwendung bequemen Sinn sagt man, daß die Größe $\frac{1}{a-b}$ die Summe dieser Reyhe sey, indem sie eigentlich ihre Gränze oder eine Größe ist, von welcher diese Reyhe um weniger als um irgend eine gegebene Größe differiren kann.

Ist $a=b$; so ist die Ergänzung $\frac{\frac{b^{m+1}}{a^{m+1}}}{a-b} = \frac{1}{a-b}$ der zu entwickelnden Größe selbst gleich; und folglich gibt die schon vorgenommene Entwiklung irgend einer Anzahl von

Gliedern keinen Aufschluß über den Werth der zu entwikkelnden Größe. Man kann nämlich aus der Entwiklung des Ausdruks $\frac{1}{1-1} = 1+1+1+1+1+\ldots+1+\frac{1}{1-1}$ nichts schliessen, und lernt daraus nur, daß man das, was von Ausdrücken der Größen wahr ist, nicht auf Ausdrücke anwenden kann, welche keine Größen sind.

Es sey $a < b$; so wird die Ergänzung $\frac{\frac{b^{m+1}}{a^{m+1}}}{a-b}$, das Zeichen bey Seite gesezt, durch Vermehrung des Zählers $\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}$ immer größer und größer, je eine größere Anzahl von Gliedern man entwickelt; mithin entfernt man sich vom Werth der zu entwickelnden Größe immer mehr, je mehr man Glieder entwickelt.

In diesem Fall muß man, ehe man die vorgegebene Entwiklung vornimmt, die zu entwickelnde Größe $\frac{1}{a-b}$ zuvörderst unter die Gestalt $-\frac{1}{b-a}$ bringen; und da nach der Voraussezung b größer ist als a, so nähert sich diese Reyhe

$$-\left(\frac{1}{b}+\frac{a}{bb}+\frac{aa}{b^3}+\frac{a^3}{b^4}+\frac{a^4}{b^5}+\ldots\right)$$

der zu entwickelnden Größe $-\frac{1}{b-a}$ desto mehr, je mehr man Glieder derselben nimmt.

Ebenso verhält es sich mit der Entwiklung des Bruchs $\frac{1}{a+b}$, welche

$$\frac{1}{a}-\frac{b}{aa}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}+\ldots\ldots\pm\frac{b^m}{a^{m+1}}\mp\frac{\frac{b^{m+1}}{a^{m+1}}}{a+b}$$

gibt. Ist a größer als b; so ist die Ergänzung des entwickelten Theils, $\frac{\frac{b^{m+1}}{a^{m+1}}}{a+b}$, desto kleiner, je größer die Anzahl der entwickelten Glieder ist; und alsdenn ist die Größe,

$\frac{1}{a+b}$, die Gränze der entwickelten Größe. Ist $a=b$, so entfernt sich die entwickelte Größe von der zu entwickelnden wechselsweise in den beyden entgegengesezten Richtungen, in plus und in minus, um eine Größe, die dieser Größe (a oder b) selber gleich ist, und man kann mithin aus dieser Entwicklung nichts schliessen. Ist $a<b$; so wird die Ergänzung $\frac{b^{m+1}}{a^{m+1}}$ desto größer, je größer die Anzahl der entwickelten Glieder ist, und folglich entfernt sich der entwickelte Theil desto mehr von der zu entwickelnden Größe, je weiter man diese Entwiklung treibt. Damit die Entwiklung richtig sey, muß man sie, statt mit $\frac{1}{a+b}$, mit $\frac{1}{b+a}$ vornehmen.

Diese wichtige und nothwendige Bemerkungen gelten aus ähnlichen Gründen noch mehr von den Entwiklungen gebrochener Ausdrücke mit Exponenten, die größer als die Einheit sind.

So ist $\frac{1}{aa-2ab+bb} = \frac{1}{aa} + \frac{2ab-bb}{aa(aa-2ab+bb)}$

$$= \frac{1}{aa} + \frac{2b}{a^3} + \frac{3abb-2b^3}{a^3(aa-2ab+bb)}$$

$$= \frac{1}{aa} + \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} + \frac{4ab^3-3b^4}{a^4(aa-2ab+bb)}$$

$$= \frac{1}{aa} + \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} + \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5ab^4-4b^5}{a^5(aa-2ab+bb)}$$

$$= \frac{1}{aa} + \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} + \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} + \ldots + \frac{(m-1)b^{m-2}}{a^m} + \frac{mab^{m-1}-(m-1)b^m}{a^m(aa-2ab+bb)}$$

Die Ergänzung $m \times \frac{b^{m-1}}{a^{m-1}} \times \frac{1}{(a-b)^2} - (m-1)\frac{b^m}{a^m} \times \frac{1}{(a-b)^2}$ wird desto kleiner, je größer die entwickelte Anzahl von Gliedern ist, nur in dem Fall, wenn $b<a$. Ist $a=b$; so ist diese Ergänzung die zu entwickelnde Größe $\frac{1}{(a-b)^2}$ selbst,

und die Entwiklung gibt daher keine Belehrung. Ist $b \gtrdot a$; so ist diese Ergänzung $-\frac{b^{m-1}}{a^{m-1}} \times \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{(m-1)b-ma}{a}\right)$, welches wegen dem Factor $\left(\frac{b}{a}\right)^{m-1}$ desto größer wird, je größer die Anzahl der entwickelten Glieder ist. Solang $(m-1)b \gtrdot ma$, oder $m \gtrdot \frac{b}{b-a}$, so ist der entwickelte Theil größer als die zu entwickelnde Größe, und er entfernt sich von ihr desto mehr, je größer die Anzahl der entwickelten Glieder ist. Diese Ergänzung verschwindet, wenn $m = \frac{b}{b-a}$; und der entwickelte Theil ist kleiner als die zu entwickelnde Größe, wenn $m < \frac{b}{b-a}$.

Beyspiel. Es sey $b = \frac{4}{3}a$. Sey $m = \frac{\frac{4}{3}a}{\frac{1}{3}a} = 4$.

So ist $\frac{1}{(a-b)^2} = \frac{9}{aa} = \frac{1}{aa}(1 + 2 \times \frac{4}{3} + 3 \times \frac{16}{9})$

$= \frac{1}{aa}(1 + 2\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3}) = 9 \times \frac{1}{aa}$.

Wenn $m \gtrdot 4$; so entfernt sich die entwickelte Größe von der zu entwickelnden $\frac{1}{(a-b)^2}$ desto mehr, je mehr man Glieder nimmt.

Irrationelle Beyspiele. $\sqrt{(aa+bb)} = (aa+bb)^{\frac{1}{2}}$

$= a + \frac{1}{2} \cdot \frac{bb}{a} + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{2} \frac{b^4}{a^3} + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{-\frac{3}{2}}{3} \frac{b^6}{a^5} + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdots \frac{-\frac{5}{2}}{4} \frac{b^8}{a^7} +$

$\left(\frac{\frac{1}{2}}{1} \cdots \frac{-\frac{7}{2}}{5} \frac{b^{10}}{a^9} + \cdots\right.$

$= a + \frac{1}{2} \cdot \frac{bb}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^4}{a^3} + \frac{1}{16}\frac{b^6}{a^5} - \frac{5}{128}\frac{b^8}{a^7} + \frac{7}{1024}\frac{b^{10}}{a^9} - \frac{21}{4096}\frac{b^{12}}{a^{11}} + \cdots$

Sey $b = a$; $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{1024} - \frac{21}{4096} + \cdots$

$\frac{1}{\sqrt{(aa\ bb)}} = (aa-bb)^{\frac{-1}{2}} =$

$\frac{1}{a} + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{bb}{a^3} + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{\frac{3}{2}}{2} \frac{b^4}{a^5} + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdots \frac{\frac{5}{2}}{3} \frac{b^6}{a^7} + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdots \frac{\frac{7}{2}}{4} \frac{b^8}{a^9} + \cdots$

$= \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\frac{bb}{a^3} + \frac{3}{8}\frac{b^4}{a^5} + \frac{5}{16}\frac{b^6}{a^7} + \frac{35}{64}\frac{b^8}{a^9} + \frac{63}{128}\frac{b^{10}}{a^{11}} + \cdots$

Scholion. Wäre diese Entwiklung richtig, wenn $b > a$; so würde die reelle Größe

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\frac{bb}{a^3} + \frac{3}{8}\frac{b^4}{a^5} + \frac{5}{16}\frac{b^6}{a^7} + \frac{35}{64}\frac{b^8}{a^9} + \frac{63}{128}\frac{b^{10}}{a^{11}} + \ldots\ldots$$

der imaginären Größe $\frac{1}{\sqrt{(aa-bb)}}$ gleich seyn: welches ungereimt ist.

§. 165.

Seiner häufigen Anwendungen wegen verdient folgender Fall der Entwiklung des Binomialtheorems besonders abgehandelt zu werden.

Es sey das Product $(x+a)(x+a')$ der beyden Binomien $x+a$, $x+a'$ vorgelegt; man verlangt die nte Potenz desselben, oder das Product der beyden Reyhen.

$$x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}a + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^{n-2}a^2 + \frac{n}{1}\cdot\cdot\frac{n-2}{3}x^{n-3}a^3 + \ldots$$
$$\left(+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2a^{n-2} + \frac{n}{1}xa^{n-1} + a^n\right.$$

$$x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}a' + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^{n-2}a'^2 + \frac{n}{1}\cdot\cdot\frac{n-2}{3}x^{n-3}a'^3 + \ldots$$
$$\left(+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2a'^{n-2} + \frac{n}{1}xa'^{n-1} + a'^n\right.$$

Potenzen von x		Coefficienten		
x^{2n}		1	=	1
x^{2n-1}		$\frac{n}{1}a$	=	$\frac{n}{1}a$
		$+\frac{n}{1}a'$		$+\frac{n}{1}a'$
x^{2n-2}		$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^2$		$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^2$
		$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n}{1}aa'$	$=+2$	$\frac{n\cdot n}{1\cdot 2}aa'$
		$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a'^2$		$+\frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}a'^2$

$$x^{2n-3} \cdot \cdot \cdot \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \frac{n-2}{3} a^3 \\ + \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^2 a' \\ + \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a a'^2 \\ + \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \frac{n-2}{3} a'^3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^3 \\ + 3 \cdot \frac{n \cdot n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^2 a' \\ + 3 \cdot \frac{n \cdot n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} a a'^2 \\ + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a'^3 \end{array} \right\}$$

$$x^{2n-4} \cdot \cdot \cdot \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-3}{4} a^4 \\ + \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n}{1} a^3 a' \\ + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^2 a'^2 \\ + \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{1} \cdot \cdot \frac{n-2}{3} a a'^3 \\ + \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-3}{4} a'^4 \end{array} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-3}{4} a^4 \\ + 3 \cdot \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n}{4} a^3 a' \\ + 6 \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n}{3} \cdot \frac{n-1}{4} a^2 a'^2 \\ + 4 \cdot \frac{n \cdot n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a a'^3 \\ + \frac{n \cdot \cdot \cdot \cdot n-3}{1 \cdot \cdot \cdot \cdot 4} a'^4 \end{array} \right\}$$

$$x^{2n-5} \cdot \cdot \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-4}{5} a^5 \\ + \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \frac{n}{1} a^4 a' \\ + \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^3 a'^2 \\ + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-2}{3} a^2 a'^3 \\ + \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-3}{4} a a'^4 \\ + \frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n-4}{5} a'^5 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{n}{1} \cdots \frac{n-4}{5} a^5 \Big] \cdots$$

$$+ 5 \cdot \frac{n \ldots n-3 \cdot n}{1 \ldots 5} a^4 a'$$

$$+ 10 \cdot \frac{n \ldots n-2 \cdot n \cdot n-1}{1 \ldots 5} a^3 a'^2$$

$$+ 10 \cdot \frac{n \cdot n-1 \cdot n \ldots n-2}{1 \ldots 5} a^2 a'^3$$

$$+ 5 \cdot \frac{n \cdot n \ldots (n-3)}{1 \ldots 5} a a'^4$$

$$+ \frac{n \ldots n-4}{1 \ldots 5} a'^5 \Big\}$$

$$x^{2n-6} \cdots \frac{n}{1} \cdots \frac{n-5}{6} a^6 \Big]$$

$$+ \frac{n}{1} \cdots \frac{n-4}{5} \cdot \frac{n}{1} a^5 a'$$

$$+ \frac{n}{1} \cdots \frac{n-3}{4} \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^4 a'^2$$

$$+ \frac{n}{1} \cdots \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n-2}{3} a^3 a'^3$$

$$+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n}{1} \cdots \frac{n-3}{4} a^2 a'^4$$

$$+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{1} \cdots \frac{n-4}{5} a a'^5$$

$$+ \frac{n}{1} \cdots \frac{n-5}{6} a'^6 \Big\}$$

$$= \frac{n \ldots n-5}{1 \ldots 6} a^6 \Big]$$

$$+ 6 \cdot \frac{n \ldots n-4 \cdot n}{1 \ldots 6} a^5 a'$$

$$+ 15 \cdot \frac{n \ldots n-3 \cdot n \cdot n-1}{1 \ldots 6} a^4 a'^2$$

$$+ 20 \cdot \frac{n \ldots n-2 \cdot n \ldots n-2}{1 \ldots 6} a^3 a'^3$$

$$+ 15 \cdot \frac{n \cdot n-1 \cdot n \ldots n-3}{1 \ldots 6} a^2 a'^4$$

$$+ 6 \cdot \frac{n \cdot n \ldots n-4}{1 \ldots 6} a a'^5$$

$$+ \frac{n \ldots n-5}{1 \ldots 6} a'^6 \Big\}$$

$$x^{n-7} \ldots + \frac{n}{1} \ldots \frac{n-6}{7} a^7 + \frac{n}{1} \ldots \frac{n-5}{6} \cdot \frac{n}{1} a^6 a' \} = \frac{n \ldots n-6}{1 \ldots 7} a^7 + 7 \cdot \frac{n \ldots (n-5) \cdot n}{1 \ldots 7} a^6 a'$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{1} \ldots \frac{n-5}{6} aa^{16} + \frac{n}{1} \ldots \frac{n-6}{7} a^{17} \} = + 7 \cdot \frac{n \cdot n \ldots n-5}{1 \ldots 7} aa^{16} + \frac{n \ldots n-6}{1 \ldots 7} a^{17}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x^{n+2} \ldots \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2} + \frac{n}{1} \ldots \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n}{1} a^{n-3} a' \} = \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} a^{n-2} + 4 \cdot \frac{n \ldots n-2 \cdot n}{1 \ldots 4} a^{n-3} a'$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{1} \ldots \frac{n-2}{3} aa'^{n-3} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a'^{n-2} \} = + 4 \cdot \frac{n \cdot n \ldots n-2}{1 \ldots 4} aa'^{n-3} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} a'^{n-4}$$

$$x^{n+1} \ldots \frac{n}{1} a^{n-1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n}{1} a^{n-2} a' \} = \frac{n}{1} a'^{n-1} + 3 \cdot \frac{n \cdot n-1 \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-2} a'$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} aa'^{n-2} + \frac{n}{1} a'^{n-1} \} = + 3 \cdot \frac{n \cdot n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} aa'^{n-2} + \frac{n}{1} a'^{n-1}$$

$$x^n \ldots\ldots a^n + \frac{n}{1}\cdot\frac{n}{1}a^{n-1}a' + \ldots + \frac{n}{1}\cdot\frac{n}{1}aa'^{n-1} + a'^n \Bigg\} = \frac{a^n}{} + 2\cdot\frac{n\cdot n}{1\cdot 2}a^{n-1}a' + \ldots + 2\cdot\frac{n\cdot n}{1\cdot 2}aa'^{n-1} + a'^n \Bigg\}$$

$$x^{n-1} \ldots\ldots \frac{n}{1}a^n a' + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n}{1}a^{n-1}a'^2 + \ldots + \frac{n}{1}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^2 a'^{n-2} + \frac{n}{1}aa'^n \Bigg\} = \frac{n}{1}a^n a' + 3\cdot\frac{n\cdot n-1\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-1}a'^2 + \ldots + 3\cdot\frac{n\cdot n\cdot n-1}{1\cdot 2\cdot 3}a^2 a'^{n-2} + \frac{n}{1}aa'^n \Bigg\}$$

$$x^{n-2} \ldots\ldots \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^n a'^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-1}a'^3 + \ldots + \frac{n}{1}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-2}{3}a^3 a'^{n-1} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^2 a'^n \Bigg\} = \frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}a^n a'^2 + 4\cdot\frac{n\ldots n-2\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{n-1}a'^3 + \ldots + 4\cdot\frac{n\cdot n\ldots n-2}{1\ldots 4}a^3 a'^{n-1} + \frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}a^2 a'^n \Bigg\}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x^3 \ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^n\ a'^{n-3} \\ +\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n}{1}\, a^{n-1}a'^{n-2} \\ +\frac{n}{1}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\, a^{n-2}a'^{n-1} \\ +\frac{n}{1}\cdot\cdot\frac{n-2}{3}\, a^{n-3}a'^{n} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} \frac{n\ldots(n-2)}{1\ldots3} a^n\ a'^{n-3} \\ +3\cdot\frac{n.n-1.n}{1\ldots3} a^{n-1}a'^{n-2} \\ +3\cdot\frac{n.n.n-1}{1\ldots3} a^{n-2}a'^{n-1} \\ +\frac{n\ldots n-2}{1\ldots3} a^{n-3}a'^{n} \end{array}$$

$$x^2 \ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{n.n-1}{1.2} a^n\ a'^{n-2} \\ +\frac{n}{1}\cdot\frac{n}{1} a^{n-1}a'^{n-1} \\ +\frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2}a'^{n} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} \frac{n.n-1}{1.2} a^n\ a'^{n-2} \\ +2\cdot\frac{n.n}{1.2} a^{n-1}a'^{n-1} \\ +\frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2}a'^{n} \end{array}$$

$$x^1 \ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{1} a^n\ a'^{n-1} \\ +\frac{n}{1} a^{n-1}a'^{n} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} \frac{n}{1} a^n\ a'^{n-1} \\ +\frac{n}{1} a^{n-1}a'^{n} \end{array}$$

$$x^0 \ldots 1\ a^n\ a'^{n} = 1\ a^n\ a'^{n}$$

§. 166.

Die Combinationslehre läßt sich auch mit dem besten Erfolg auf die Bestimmung der Potenzen einer ganzen Function einer veränderlichen Größe anwenden. Und da diese Bestimmung sehr viele Anwendungen findet, so glaube ich dieselbe hier entwickeln zu müssen.

Es sey eine ganze Function einer veränderlichen Größe x. (Man sehe §. 168.)

Die Coefficienten der Glieder, in welchen die Exponenten der Potenzen von x

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 . . . m

sind, seyen

$A^0, A', A'', A''', A^{IV}, A^V, A^{VI}, A^{VII}, A^{VIII}, A^{IX}, A^X \ldots A^{(M)}$

Erstes Beyspiel.

Es sey das Quadrat dieser Function zu nehmen. Dis Quadrat wird bestehen aus allen Producten zweyer Glieder der Function, die Quadrate dieser Glieder mit eingeschlossen. Und die Coefficienten der Glieder des Quadrats, in welchen die Exponenten von x wie die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3.... wachsen, sind so wie sie folgendes Schema darstellt:

Exponenten von x	Coefficienten
0	$A^{\circ 2}$
1	$2A^{\circ} \times A'$
2	$2A^{\circ} \times A'' + A'^{2}$
3	$2A^{\circ} \times A''' + 2A' \times A''$
4	$2A^{\circ} \times A^{IV} + 2A' \times A''' + A''^{2}$
5	$2A^{\circ} \times A^{V} + 2A' \times A^{IV} + 2A'' \times A'''$
6	$2A^{\circ} \times A^{VI} + 2A' \times A^{V} + 2A'' \times A^{IV} + A'''^{2}$
7	$2A^{\circ} \times A^{VII} + 2A' \times A^{VI} + 2A'' \times A^{V} + 2A''' \times A^{IV}$
. . . .	. . . .

$$2m \quad \cdots \quad \left\{\begin{array}{l} 2A^{\circ} \times A^{(M)} \\ +2A^{'} \times A^{(2M-1)} \\ +2A^{''} \times A^{(2M-11)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ +2A^{(M-1)} \times A^{(M+1')} \\ +\ A^{(M)^2} \end{array}\right.$$

$$2m+1 \quad \cdots \quad \left\{\begin{array}{l} 2A^{\circ} \times A^{(2M+1)} \\ +2A^{'} \times A^{(2M)} \\ +2A^{''} \times A^{(2M-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ +2A^{(M-1)} \times A^{(M+11)} \\ +2A^{(M)} \times A^{(M+1)} \end{array}\right.$$

Das Glied des Quadrats nämlich, in welchem die veränderliche x irgend einen Exponenten m hat, ist die Summe der Producte derjenigen Glieder der vorgegebenen Function zu zwey und zwey, in welchen die Summe der Exponenten der veränderlichen m ist. Man hat mithin, um den Coefficienten dieses Glieds zu bestimmen, alle Arten zu suchen, wie die Zahl m die Summe zweyer natürlichen Zahlen von o bis m seyn kann, und die Producte der Glieder zu nehmen, welche zu den Potenzen der veränderlichen gehören, deren Exponenten eben diese natürliche Zahlen sind.

Beyspiel.

$8 = 0 + 8$ Coefficienten von x^8 $\left\{\begin{array}{l} A^{\circ}.A^{VIII} \\ +A^{'}.A^{VII} \\ +A^{''}.A^{VI} \\ +A^{'''}.A^{V} \\ +A^{IV}.A^{IV} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 2A^{\circ}.A^{VIII} \\ +2A^{'}.A^{VII} \\ +2A^{''}.A^{VI} \\ +2A^{'''}.A^{V} \\ +(A^{IV})^2 \end{array}\right\}$

$= 1 + 7$

$= 2 + 6$

$= 3 + 5$

$= 4 + 4$

= 5 + 3		+ $A^{v} . A'''$
= 6 + 2		+ $A^{vi} . A''$
= 7 + 1		+ $A^{vii} . A'$
= 8 + 0		+ $A^{viii} . A^{o}$

9 = 0 + 9	Coefficienten von x^{9}	$A^{o} . A^{ix}$	= $2A^{o} . A^{ix}$
1 + 8		+ $A' . A^{viii}$	+ $2A' . A^{viii}$
2 + 7		+ $A'' . A^{vii}$	+ $2A'' . A^{vii}$
3 + 6		+ $A''' . A^{vi}$	+ $2A''' . A^{vi}$
4 + 5		+ $A^{iv} . A^{v}$	+ $2A^{iv} . A^{v}$
5 + 4		+ $A^{v} . A^{iv}$	
6 + 3		+ $A^{vi} . A'''$	
7 + 2		+ $A^{vii} . A''$	
8 + 1		+ $A^{viii} . A'$	
9 + 0		+ $A^{ix} . A^{o}$	

Zweytes Beyspiel.

Es sey der Würfel der vorgegebenen Funktion zu nehmen. Dieser besteht aus allen Producten von drey Gliedern der genannten Function, diejenige Producte mitbegriffen, welche die Würfel und die Quadrate dieser Glieder enthalten.

Um den Coefficienten des Glieds zu finden, welches einen gegebenen Exponenten hat, suche man alle Arten, diesen Exponenten durch die Summe dreyer untereinander gleichen oder ungleichen natürlichen Zahlen von der Null an, mit Rüksicht auf die Ordnung dieser Zahlen, auszudrücken; man nehme die Producte derjenigen Glieder der Function, in welchen die veränderliche diese Zahlen zu Exponenten hat, und wiederhole jedes dieser Producte soviel mal, als sich die Factoren, aus denen es besteht, versezen lassen. Die Summe dieser so multiplicirten Producte ist der Coefficient des Glieds des Würfels, in welchem die veränderliche den gegebenen Exponenten hat.

Beyspiel. $7 = 0+0+7$ | Exponent der veränderlichen 7 | Coefficient

$0+1+6$
$0+2+5$
$0+3+4$
$1+1+5$
$1+2+4$
$1+3+3$
$2+2+3$

$3\,A^{\circ 2}.A^{VII}$
$+6\,A^{\circ}.A^{'}.A^{VI}$
$+6\,A^{\circ}.A^{''}.A^{V}$
$+6\,A^{\circ}.A^{'''}.A^{IV}$
$+3\,A^{'2}.A^{''}_{V}$
$+6\,A^{'}.A^{''}_{IV}.A^{'''}$
$+3\,A^{'}.A^{'''2}$
$+2\,A^{''2}.A^{'''}$

$8 = 0+0+8$ | 8

$0+1+7$
$0+2+6$
$0+3+5$
$0+4+4$
$1+1+6$
$1+2+5$
$1+3+4$
$2+2+4$
$2+3+3$

$+3\,A^{\circ 2}.A^{VIII}$
$+6\,A^{\circ}.A^{'}.A^{VII}$
$+6\,A^{\circ}.A^{''}.A^{VI}$
$+6\,A^{\circ}.A^{'''}.A^{V}$
$+3\,A^{\circ}.A^{IV2}$
$+3\,A^{'2}_{I}.A^{V'}$
$+6\,A^{'}_{I}.A^{''}.A^{V}_{IV}$
$+6\,A^{'}_{I}.A^{'''}.A^{IV}$
$+3\,A^{''2}.A^{IV}$
$+3\,A^{''}.A^{'''2}$

Drittes Beyspiel.

Es sey die vierte Potenz der vorgelegten Function zu nehmen. Diese vierte Potenz besteht aus allen Producten von vier Gliedern der genannten Function, die Producte mit eingeschlossen, in welchen eines dieser Glieder mehrere male als Factor vorkommt.

Um den Coefficienten des Glieds zu finden, welches einen gegebenen Exponenten hat, suche man alle Arten, diesen Exponenten durch die Summe vier einander gleicher oder ungleicher natürlicher Zahlen von der Null an, mit Rükficht auf die Ordnung der Zahlen, hervorzubringen. Man nehme die Producte der Glieder der Function, in welchen die veränderliche diese Zahlen zu Exponenten hat, und wiederhole jedes dieser Producte sovielmal, als man die Factoren, aus denen es besteht, verschiedentlich anord-

nen

nen kann. Die Summe dieser so multiplicirten Producte ist der Coefficient desjenigen Glieds der vierten Potenz, in welchem die veränderliche den gegebenen Exponenten hat.

Beyspiel.

	Exponent der veränderlichen	Coefficient
$7 = 0+0+0+7$	7	$4\,A^{\circ 3}.A^{VII}$
$0+0+1+6$		$+12\,A^{\circ 2}.A^{I}.A^{VI}$
$0+0+2+5$		$+12\,A^{\circ 2}.A^{II}.A^{V}$
$0+0+3+4$		$+12\,A^{\circ 2}.A^{III}.A^{IV}$
$0+1+1+5$		$+12\,A^{\circ}.A^{I 2}.A^{V}$
$0+1+2+4$		$+24\,A^{\circ}.A^{I}.A^{II}.A^{IV}$
$0+1+3+3$		$+12\,A^{\circ}.A^{I}.A^{III 2}$
$0+2+2+3$		$+12\,A^{\circ}.A^{II 2}.A^{III}$
$1+1+1+4$		$+4\,A^{III 3}.A^{IV}$
$1+1+2+3$		$+12\,A^{I 2}.A^{II}.A^{III}$
$1+2+2+2$		$+4\,A^{I}.A^{II 3}$
$8 = 0+0+0+8$	8	$+4\,A^{\circ 3}.A^{VIII}$
$0+0+1+7$		$+12\,A^{\circ 2}.A^{I}.A^{VII}$
$0+0+2+6$		$+12\,A^{\circ 2}.A^{II}.A^{VI}$
$0+0+3+5$		$+12\,A^{\circ 2}.A^{III}.A^{V}$
$0+0+4+4$		$+6\,A^{\circ 2}.A^{IV 2}$
$0+1+1+6$		$+12\,A^{\circ}.A^{I 2}.A^{VI}$
$0+1+2+5$		$+24\,A^{\circ}.A^{I}.A^{II}.A^{V}$
$0+1+3+4$		$+24\,A^{\circ}.A^{I}.A^{III}.A^{IV}$
$0+2+2+4$		$+12\,A^{\circ}.A^{II 2}.A^{IV}$
$0+2+3+3$		$+12\,A^{\circ}.A^{II}.A^{III 2}$
$1+1+1+5$		$+4\,A^{I 3}.A^{V}$
$1+1+2+4$		$+12\,A^{I 2}.A^{II}.A^{IV}$
$1+1+3+3$		$+6\,A^{I 2}.A^{III 2}$
$1+2+2+3$		$+12.A^{I}.A^{II 2}.A^{III}$
$2+2+2+2$		$+1.A^{II 4}$

Allgemein: Die Potenz einer gegebenen Function einer veränderlichen Größe, deren Exponent irgend eine ganze positive Zahl m ist, besteht aus den Producten von m

Gliedern dieser Function, diejenige Producte mit eingeschlossen, in welchen eines oder mehrere dieser Glieder mehrmalen als Factoren enthalten sind.

Um den Coefficienten des Glieds zu finden, welches einen gegebenen Exponenten hat, suche man alle Arten, diesen Exponenten durch die Summe von m natürlichen, unter einander gleichen oder ungleichen Zahlen von der Null an hervorzubringen, mit Rüksicht auf die Ordnung dieser Zahlen. Man nehme die Producte derjenigen Glieder der Function, in welchen die veränderliche diese Zahlen zu Exponenten hat, und wiederhole jedes dieser Producte soviel=mal, auf wieviel Arten die Factoren, aus denen es besteht, sich anordnen lassen. Die Summe der so multiplicirten Producte ist der Coefficient des Glieds der mten Potenz, in welchem die veränderliche den gegebenen Exponenten hat.

Beyspiel. Man verlangt in der sechsten Potenz der gegebenen Function die Coefficienten der Glieder, deren Exponenten 7 und 8 sind.

	Versezungszahl	Coefficient von x^7
7 = 0+0+0+0+0+0+7	. . 6 . .	$6A^{\circ 5}.A^{VII}$
0+0+0+0+0+1+6	. . 30 . .	$+ 30A^{\circ 4}.A^{I}.A^{VI}$
0+0+0+0+0+2+5	. . 30 . .	$+ 30A^{\circ 4}.A^{II}.A^{V}$
0+0+0+0+0+3+4	. . 30 . .	$+ 30A^{I 4}.A^{III}.A^{IV}$
0+0+0+0+1+1+5	. . 60 . .	$+ 60A^{\circ 3}.A^{I 2}.A^{V}$
0+0+0+0+1+2+4	. . 120 . .	$+120A^{\circ 3}.A^{I}.A^{II}.A^{IV}$
0+0+0+0+1+3+3	. . 60 . .	$+ 60A^{\circ 3}.A^{I}.A^{III 2}$
0+0+0+0+2+2+3	. . 60 . .	$+ 60A^{\circ 3}.A^{II 2}.A^{III}$
0+0+0+1+1+1+4	. . 60 . .	$+ 60A^{\circ 2}.A^{I 3}.A^{IV}$
0+0+0+1+1+2+3	. . 180 . .	$+180A^{\circ 2}.A^{I 2}.A^{II}.A^{III}$
0+0+0+1+2+2+2	. . 60 . .	$+ 60A^{\circ 2}.A^{I}.A^{II 3}$
0+0+1+1+1+1+3	. . 30 . .	$+ 30A^{\circ}.A^{I 4}.A^{III}$
0+0+1+1+1+2+2	. . 60 . .	$+ 60A^{\circ}.A^{I 3}.A^{II 2}$
0+1+1+1+1+1+2	. . 6 . .	$+ 6A^{I 5}.A^{II}$

Versezungszahl	Coefficient von x^8
8=0+0+0+0+0+0+8	.. 6 .. $6A^{\circ 5}.A^{VIII}.$
0+0+0+0+0+1+7	.. 30 .. + $30A^{\circ 4}.A^{I}.A^{VII}$
0+0+0+0+0+2+6	.. 30 .. + $30A^{\circ 4}.A^{II}.A^{VI}$
0+0+0+0+0+3+5	.. 30 .. + $30A^{\circ 4}.A^{III}.A^{V}$
0+0+0+0+0+4+4	.. 15 .. + $15A^{\circ 4}.A^{IV}_{2}$
0+0+0+0+1+1+6	.. 60 .. + $60A^{\circ 3}.A^{I}_{2}.A^{VI}$
0+0+0+0+1+2+5	.. 120 .. +$120A^{\circ 3}.A^{I}.A^{II}.A^{V}$
0+0+0+0+1+3+4	.. 120 .. +$120A^{\circ 3}.A^{I}.A^{III}.A^{IV}$
0+0+0+0+2+2+4	.. 60 .. + $60A^{\circ 3}.A^{II}_{2}.A^{IV}$
0+0+0+0+2+3+3	.. 60 .. + $60A^{\circ}_{3}.A^{II}_{2}.A^{III}_{2}$
0+0+0+1+1+1+5	.. 60 .. + $60A^{\circ 2}.A^{I}_{2}.A^{V}$
0+0+0+1+1+2+4	.. 180 .. +$180A^{\circ 2}.A^{I}_{2}.A^{II}.A^{IV}$
0+0+0+1+1+3+3	.. 90 .. + $90A^{\circ 2}.A^{I}_{2}.A^{III}_{2}$
0+0+0+1+2+2+3	.. 180 .. +$180A^{\circ 2}.A^{I}.A^{II}_{2}.A^{III}$
0+0+0+2+2+2+2	.. 15 .. + $15A^{\circ 2}.A^{II}_{4}$
0+1+1+1+1+1+4	.. 30 .. + $38A^{\circ}.A^{I}_{4}.A^{IV}$
0+1+1+1+1+2+3	.. 120 .. +$120A^{\circ}.A^{I}_{3}.A^{II}.A^{III}$
0+1+1+1+2+2+2	.. 60 .. + $60A^{\circ}.A^{I}_{2}.A^{II}_{3}$
1+1+1+1+1+1+3	.. 6 .. + $6A^{I}_{5}.A^{III}$
1+1+1+1+1+2+2	.. 15 .. + $15A^{I}_{4}.A^{II}_{2}$ *)

§. 167.

Um die Formel des Binomialtheorems auf ein Binomium $a+b\sqrt{-1}$ anzuwenden, welches aus einem reellen Theil a und einem imaginären $b\sqrt{-1}$ besteht; muß man folgendes bemerken:

1°. Die geraden Potenzen von $\sqrt{-1}$ sind reell. Nämlich die Potenzen von $\sqrt{-1}$, deren Exponenten gerademal gerade Zahlen 4, 8, 12, 16...4n sind, + 1, und die

*) Man sehe Hindenburgs Polynomischen Lehrsaz. Leipz. 1796.

Potenzen von $\sqrt{-1}$, deren Exponenten ungerademal gerade sind wie 2, 6, 10, 14....4n+2, sind -1.

2°. Die ungeraden Potenzen von $\sqrt{-1}$ sind auch $\sqrt{-1}$; nämlich die Potenzen von $\sqrt{-1}$, deren Exponenten eine gerademal gerade Zahl um eine Einheit übertreffen, oder 1, 5, 9, 13,....4n+1, sind $+\sqrt{-1}$; und die Potenzen von $\sqrt{-1}$, deren Exponenten eine ungerademal gerade Zahl um eine Einheit übertreffen, oder 3, 7, 11, 15....4n+3, sind $-\sqrt{-1}$.

§. 168.

Dis vorausgesezt, erhält man

$$(a+b\sqrt{-1})^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b\sqrt{-1} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1}..\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3\sqrt{-1}$$
$$+ \frac{n}{1}...\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 + \frac{n}{1}..\frac{n-4}{5}a^{n-5}b^5\sqrt{-1} - ....$$
$$= \left(a^n - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}...\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 - \frac{n}{1}..\frac{n-5}{6}a^{n-6}b^6 + \frac{n}{1}... - \frac{n-7}{8}a^{n-8}b^8 - ...\right)$$
$$+ \left(\frac{n}{1}a^{n-1}b - \frac{n}{1}..\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}..\frac{n-4}{5}a^{n-5}b^5 - \frac{n}{1}..\frac{n-6}{7}a^{n-7}b^7 + \frac{n}{1}... - \frac{n-8}{9}a^{n-9}b^9 - ...\right)\sqrt{-1}$$

Es sey A die aus den ungeraden, abwechslend mit dem Zeichen der Addition und der Subtraction begleiteten, Gliedern des Binomiums $(a+b)^n$ bestehende Reyhe; und B die Reyhe der geraden Glieder, welche ebenfalls abwechselnd das Zeichen der Addition und Subtraction vor sich haben. So hat man

$$(a+b\sqrt{-1})^n = A + B\sqrt{-1}.$$

Da die Formel des Binomiums für jeden, ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Exponenten gültig bewiesen worden ist; so kommt man auf folgenden Saz:

Eine Potenz eines zum Theil reellen, zum Theil imaginären Binomiums $a+b\sqrt{-1}$ von irgend einem ganzen

oder gebrochenen, positiven oder negativen Exponenten ist ein Binomium von der nämlichen Form $A+B\sqrt{-1}$, dessen imaginärer Theil auch blos mit dem imaginären Zeichen $\sqrt{-1}$ behaftet ist.

§. 169.

Dieser Schluß darf nicht über die ursprüngliche Voraussezung hinaus ausgedehnt werden, daß $a+b\sqrt{-1}$ ein zum Theil reelles, zum Theil imaginäres Binomium, und daß mithin a nicht Null sey. Man kann mithin aus dem vorhergehenden Beweis nichts für den Werth von $(b\sqrt{-1})^n$, und insbesondere für den Werth $(\sqrt{-1})^n$ schliessen, wenn n nicht eine ganze und positive Zahl ist.

Man könnte inzwischen versucht werden, vorhergehenden Beweis auch auf diesen Fall anzuwenden, indem man $b\sqrt{-1}$ unter der Form $a-(a-b\sqrt{-1})$, und mithin $(b\sqrt{-1})^n$ unter der Form

$$a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}(a-b\sqrt{-1}) + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}(a-b\sqrt{-1})^2 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}(a-b\sqrt{-1})^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{4}a^{n-4}(a-b\sqrt{-1})^4 - \ldots + \ldots$$

darstellte. Da aber diese Reyhe nur in dem Fall abbricht, wenn n eine ganze und positive Zahl ist; so führt sie zu einem blos aus b und einer Potenz von $\sqrt{-1}$ bestehenden Ausdruk nur in dem Fall, wenn n eine ganze und positive Zahl ist, und man kann keinen Schluß daraus für die andern Werthe von n ziehen, welche gerade einzig und allein die Schwierigkeit ausmachen.

Da $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ist; so ist es genug, zu beweisen, daß

$\sqrt[n]{-1}$ von der Form $a + b\sqrt{-1}$ sey, wenn n eine ganze Zahl ist.

Da $\sqrt[n]{-1} = -1$, wenn n eine ungerade Zahl ist; so ist es genug, die Wahrheit des Sazes für gerade Werthe von n zu beweisen.

Da $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a}$; so ist es genug, den Saz für den Fall zu beweisen, wo n nur gerade Factoren enthält, das heißt, für den Fall, wo n irgend eine ganze Potenz von 2 ist.

§. 170.

Lehrsaz. Sey $\sqrt[4]{-1}$; ich behaupte, daß man es auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ bringen kann.

Man seze wirklich $a + b\sqrt{-1} = \sqrt[4]{-1}$.

Man erhebe jedes Glied ins Quadrat; so erhält man

$$aa - bb + 2ab\sqrt{-1} = \sqrt{-1}.$$

Da das erste Glied dieser Gleichung die reelle Größe aa-bb, das zweyte aber keine reelle Größe enthält; so muß der reelle Theil des ersten Theils verschwinden; folglich aa-bb $= 0$, oder $aa = bb$, und $a = b$.

Die imaginären Theile der beyden Glieder müssen auch einander gleich seyn; folglich $2ab = 1$; mithin $2aa = 1$, $a\sqrt{2} = 1$. Desgleichen $b\sqrt{2} = 1$.

Daher $\sqrt[4]{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{-1})$

Wirklich ist $(1 + \sqrt{-1})^4 = 1 + 4\sqrt{-1} - 6 - 4\sqrt{-1} + 1 = -4$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

Folglich $\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^4 = -1$

Aus der Gleichung $bb = aa$ zieht man $b = \pm a$, und aus der Gleichung $2aa = 1$, $a\sqrt{2} = \pm 1$:

Man findet daher vier Werthe von $\sqrt[4]{-1}$, welche sind

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \sqrt{-1})$$

§. 171.

Zweyter Lehrsaz. Sey ein Binomium $a + b\sqrt{-1}$, zum Theil reell, zum Theil mit dem imaginären Zeichen $\sqrt{-1}$ behaftet. Ich behaupte, daß seine Quadratwurzel ein Binomium von der nämlichen Form $x + y\sqrt{-1}$ sey.

Wirklich sey $x + y\sqrt{-1} = \sqrt{(a + b\sqrt{-1})}$

folglich $xx - yy + 2xy\sqrt{-1} = a + b\sqrt{-1}$

Man seze die reellen und imaginären Theile des einen Glieds den reellen und imaginären des andern gleich; so erhält man

$$xx - yy = a, \qquad (xx - yy)^2 = aa$$
$$2xy = b \qquad 4xxyy = bb$$
$$(xx + yy)^2 = aa + bb$$
$$xx + yy = \sqrt{(aa + bb)}$$
$$xx - yy = a$$

$$2xx = \sqrt{(aa + bb)} + a, \qquad x = \sqrt{\frac{\sqrt{(aa + bb)} + a}{2}}$$

$$2yy = \sqrt{(aa + bb)} - a \qquad y = \sqrt{\frac{\sqrt{(aa + bb)} - a}{2}}$$

$$x + y\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{\sqrt{(aa + bb)} + a}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{(aa + bb)} - a}{2}} \times \sqrt{-1}$$

Wirklich ist $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{(aa + bb)} + a}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{(aa + bb)} - a}{2}} \times \sqrt{-1}\right)^2$

$$= \frac{\sqrt{(aa + bb)} + a}{2} + 2\frac{b}{2}\sqrt{-1} - \frac{\sqrt{(aa + bb)} - a}{2}$$

$$= a + b\sqrt{-1}.$$

§. 172.

Zusätze. Da $\sqrt[4]{-1}$ von der Form $a+b\sqrt{-1}$ ist; so ist auch $\sqrt[8]{-1}$ oder $\sqrt{\sqrt[4]{-1}}$ von der nämlichen Form.

Da $\sqrt[8]{-1}$ von der Form $a+b\sqrt{-1}$ ist; so ist auch $\sqrt[16]{-1}$ oder $\sqrt{\sqrt[8]{-1}}$ von der nämlichen Form.

Ebenso wird man nach einander zeigen, daß $\sqrt[32]{-1}$, $\sqrt[64]{-1}$, und allgemein $\sqrt[2^n]{-1}$ von der Form $a+b\sqrt{-1}$ ist.

Mithin reduciren sich die Wurzeln von -1, deren Exponent eine ganze und positive Potenz von 2 ist, auf das Binomium $a+b\sqrt{-1}$, dessen imaginärer Theil blos mit dem imaginären $\sqrt{-1}$ behaftet ist.

§. 173.

Ich habe §. 169. gesagt, daß, wenn n eine ungerade Zahl, $\sqrt[n]{-1}$ die reelle Größe -1 sey. Aber leztere Größe ist nicht die einzige, deren nte Potenz -1 ist, oder $\sqrt[n]{-1}$ hat nicht den einzigen Werth -1.

Beyspiele. Man findet, daß $\sqrt[3]{-1}$ drey Werthe hat, nämlich

$$-1 \quad \text{oder} \quad -1$$
$$\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2} \qquad \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{-1}$$

Desgleichen $\sqrt{-1}$ hat fünf Werthe, welche sind

$$-1,\ \frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4}\times\sqrt{-1},$$
$$\frac{-\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}\times\sqrt{-1}.$$

Man hat demnach zu untersuchen, ob, wenn n ungerade ist, in den von -1 verschiedenen Werthe von $\sqrt[n]{-1}$ andere imaginäre als $\sqrt{-1}$ Statt haben.

Sind die von -1 verschiedene Werthe von $\sqrt[n]{-1}$ imaginär; so kann ihre Unmöglichkeit nicht vom Zeichen $\sqrt[n]{-1}$ herkommen; denn wenn man in diesen Wurzeln statt $\sqrt[n]{-1}$ ihren reellen Werth -1 sezte, so würden sie aufhören imaginär zu seyn. Folglich sind die Werthe von $\sqrt[n]{-1}$, sofern sie unmöglich sind, nicht mit dem Zeichen $\sqrt[n]{-1}$ behaftet, worinn n eine ungerade Zahl ist: folglich sind diese Werthe, sofern sie unmöglich sind, mit dem Zeichen $\sqrt[2n]{-1}$ behaftet, und reduciren sich mithin auf $a+b\sqrt{-1}$.

§. 174.

Allgemeiner Schluß. Jede imaginäre Größe reducirt sich auf $\sqrt{-1}$, was für Verwiklungen auch immer in ihrem Ausdruk vorkommen mögen, ehe sie auf die Form $a+b\sqrt{-1}$ gebracht ist.

Beyspiel. Sey der Ausdruk $(a+b\sqrt[n]{-1})^m$. Um ihn auf den Ausdruk $A+B\sqrt{-1}$ zu bringen, wird man $\sqrt[n]{-1}$ unter der Form $p+q\sqrt{-1}$ darstellen, wodurch man $a+b\sqrt[n]{-1}$ auf die Form $(a+p)+q\sqrt{-1}$ bringt; so ist mithin die Größe $(a+b\sqrt[n]{-1})^m$ oder $((a+p)+q\sqrt{-1})^m$ auf die Form $A+B\sqrt{-1}$ gebracht.

Hätte man den Ausdruk $\frac{1}{(a+b\sqrt{-1})^m}{}^n$; so würde man ihn auf den Ausdruk $\frac{1}{(a+p+q\sqrt{-1})^m}$ bringen, welcher mit $\frac{(a+p-q\sqrt{-1})^m}{((a+p)^2+qq)^m}$ einerley ist.

Hat man den Ausdruk $(a+b\sqrt[n]{-1})^m \times (a'+b'\sqrt[n']{-1})^{m'}$

so wird man jeden der Factoren $(a+b\sqrt[n]{-1})^m$, $(a'+b'\sqrt[n']{-1})^{m'}$ auf die Formen $A+B\sqrt{-1}$, $A'+B'\sqrt{-1}$ bringen, deren Produkt . . $(AA'-BB')+(AB'+A'B)\sqrt{-1}$ von der Form $a+b\sqrt{-1}$ ist.

Scholion. Was die vollständigen Ausdrüke des Finalwerths einer auf $a+b\sqrt{-1}$ reducirten imaginären Größe betrift, so werden wir hievon in der analytischen Trigonometrie handeln.

§. 175.

Lehrsaz. Es sey R eine reelle, durch das imaginäre Binomium $a+b\sqrt{-1}$ theilbare Größe; ich behaupte, daß diese reelle Größe auch durch das imaginäre Binomium $a-b\sqrt{-1}$ theilbar sey.

Es sey $\frac{R}{a+b\sqrt{-1}} = (p+q\sqrt{-1})$

so ist $R = ap-bq+(aq+bp)\sqrt{-1}$.

Da nun nach der Vorausseżung R reell ist, so verschwindet der imaginäre Theil $(aq+bp)\sqrt{-1}$ des zweyten Glieds, oder $aq+bp=0$.

Man hat daher auch $R=ap-bq-(aq+bp)\sqrt{-1}$

Aber $ap-bq-(aq+bp)\sqrt{-1} = (a-b\sqrt{-1})(p-q\sqrt{-1})$

folglich $R=(a-b\sqrt{-1})(p-q\sqrt{-1})$

oder $\frac{R}{a-b\sqrt{-1}} = p-q\sqrt{-1}$.

Zusaz. Da die reelle Größe R, welche durch $a+b\sqrt{-1}$ theilbar, auch durch $a-b\sqrt{-1}$ theilbar ist, so muß dieselbe durch das Produkt der beyden Größen $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$ theilbar seyn, welches $aa+bb$ ist. Mithin lassen sich die imaginären Binomien, welche eine reelle Größe dividiren, paar und paarweise so combiniren, daß diese reelle Größe in reelle Binomien zerlegt wird, welche die Summen zweyer Quadrate sind.

Beyspiel.

$$x^4+1=\left(x+\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)$$

wo $\left(x+\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)=xx+\frac{2x}{\sqrt{2}}+1$

$$=\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

und $\left(x-\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)=xx-\frac{2x}{\sqrt{2}}+1$

$$=\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

folglich

$$x^4+1=\left(\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)\left(\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$$

Scholion. Dieser Gegenstand wird in der analytischen Trigonometrie erläutert werden.

Zwölftes Kapitel.

Ueber geometrische Reyhen und Logarithmen.

§. 176.

Erklärung. Eine Reyhe von Zahlen, deren je zwey auf einander folgende immer dasselbe Verhältnis zu einander haben, heißt eine geometrische Progression.

So sind die Reyhen

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 . . . . 2^{n-1}

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 . . . . 3^{n-1}

1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096 . . . . 4^{n-1}

1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ . . . . $\frac{1}{2^{n-1}}$

1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{243}$, $\frac{1}{729}$ . . . . $\frac{1}{3^{n-1}}$

1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{256}$, $\frac{1}{1024}$, $\frac{1}{4096}$ . . . . $\frac{1}{4^{n-1}}$

geometrische Progressionen, und zwar die drey ersten derselben wachsende, die drey lezten abnehmende

Allgemein ist die Reyhe

$$1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6 \ldots p^{n-1}$$

eine geometrische Progression, und zwar eine wachsende oder abnehmende, je nachdem p größer oder kleiner als die Einheit ist. Die Progression ist nämlich wachsend oder abnehmend, je nachdem der Exponent p des Verhältnisses, welches ein Glied zum vorhergehenden hat, größer oder kleiner als die Einheit ist. Dieser Exponent heißt auch der Exponent der Progression.

Ich habe bey den vorhergehenden Progressionen vorausgesezt, daß sie mit der Einheit anfangen. Diejenige, deren erstes Glied nicht die Einheit ist, können immer darauf zurükgeführt werden. Denn es sey eine Progression, deren erstes Glied a, das zweyte b ist; diese Progression ist einerley mit einer solchen, deren erstes Glied die Einheit, und das zweyte $\frac{b}{a}$ ist, und deren Glieder alle mit a multiplicirt sind. Nämlich die Progression

$$a, b, \frac{bb}{a}, \frac{b^3}{a^2}, \frac{b^4}{a^3}, \frac{b^5}{a^4} \ldots \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$$

ist einerley mit der Progression

$$a\left(1, \frac{b}{a}, \frac{bb}{aa}, \frac{b^3}{a^3}, \frac{b^4}{a^4}, \frac{b^5}{a^5} \ldots \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right);$$

daher werde ich in der Folge immer von Progressionen reden, deren erstes Glied die Einheit ist.

§. 177.

Es sey demnach eine geometrische Progression, welche mit der Einheit anfängt: alle Glieder derselben sind Potenzen der zweyten mit ganzen Exponenten; und das Verhältnis des ersten Glieds zu irgend einem Glied der Progression ist aus soviel Verhältnissen, welche dem Verhältnis des ersten Glieds zum zweyten gleich sind, zusammengesezt,

als der Exponent des leztern Glieds oder die Zahl seiner Stelle nach dem ersten angibt. So ist

das Verhältnis von 1 zu p^2 aus zwey Verhältnissen, die dem von 1 zu p gleich sind,

. . . . . 1 zu p^3 . . drey . . . . .

. . . . . 1 zu p^4 . . vier . . . . .

. . . . . 1 zu p^5 . . fünf . . . . .

. . . . . 1 zu p^m . . m . . . . .

zusammengesezt. Der Exponent eines Glieds der Progression, oder die Zahl, welche die Stelle, die es nach dem ersten einnimmt, angibt, zeigt demnach die Anzahl der dem Verhältnis des ersten Glieds zum zweyten gleichen Verhältnisse an, welche man zusammensezen muß, um das Verhältnis des ersten Glieds zu dem genannten zu erhalten. Daher heißt der Exponent eines Glieds des Maas des Verhältnisses der Einheit zu diesem Glied oder der Logarithme der Einheit zu diesem Glied, und Kürze halber, der Logarithme dieses Glieds selbst. Man darf aber in Absicht auf den wahren Begriff dieses Ausdruks nicht vergessen, daß er nicht der Zahl selbst zugehört, sondern die Anzahl der dem Verhältnis des ersten Glieds zum zweyten gleichen Verhältnisse anzeigt, welche zusammengesezt worden sind.

Die Exponenten 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . . n-1, welche die Logarithmen der Verhältnisse des ersten Glieds zum 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, 7ten . . . n^{ten} Gliede sind, heissen demnach auch die Logarithmen dieser Glieder selbst.

§. 178.

Hat man die Progressionen

$1, p, p^2, p^3, p^4, p^5 . . . . p^{n-1};$

so kann man dieselbe zur linken Seite des ersten Glieds verlängern, und man erhält die vollständige Reyhe

$$\frac{1}{p^{n-1}}, \frac{1}{p^{n-2}}, \ldots \frac{1}{p^5}, \frac{1}{p^4}, \frac{1}{p^3}, \frac{1}{p^2}, \frac{1}{p}, 1, p, p^2, p^3, p^4, p^5 \ldots p^{n-1}.$$

Das Verhältnis von 1 zu $\frac{1}{p}$, oder von p zu 1, ist das umgekehrte des Verhältnisses von 1 zu p; und sein Logarithme ist der entgegengesezte des Logarithmen des Verhältnisses von 1 zu p. Da mithin der Logarithme des Verhältnisses von 1 zu p die Einheit ist; so ist der Logarithme des Verhältnisses von 1 zu $\frac{1}{p}$, ...-1; und das Glied $\frac{1}{p}$ selbst wird unter der Exponentialform p^{-1} dargestellt.

Ebenso ist das Verhältnis von 1 zu $\frac{1}{p^2}$ oder von p^2 zu 1 das umgekehrte des Verhältnisses von 1 zu p^2; und sein Logarithme ist der entgegengesezte des Logarithmen von 1 zu p^2. Da nun der Logarithme des Verhältnisses von 1 zu p^2, 2 ist; so ist der Logarithme des Verhältnisses von $\frac{1}{p^2}$ zu 1, ...-2; und das Glied $\frac{1}{p^2}$ wird auch unter der Exponentialform p^{-2} dargestellt.

Ebenso ist das Verhältnis von 1 zu $\frac{1}{p^3}$ oder von p^3 zu 1, das umgekehrte des Verhältnisses von 1 zu p^3, und der Logarithme des ersten Verhältnisses der entgegengesezte vom Logarithmen des zweyten. Der Logarithme des zweyten Verhältnisses aber ist +3; folglich der Logarithme des Verhältnisses von $\frac{1}{p^3}$ zu 1, ...-3; und das Glied $\frac{1}{p^3}$ wird auch unter der Exponentialform p^{-3} vorgestellt.

Allgemein ist das Verhältnis von 1 zu $\frac{1}{p^m}$ oder von p^m zu 1 aus m Verhältnissen, die dem von p zu 1 gleich sind, zusammengesezt; und das umgekehrte des Verhältnisses von 1 zu p^m, welches aus m Verhältnissen, die dem von 1 zu p gleich sind, zusammengesezt ist; mithin ist der

Logarithme des Verhältnisses von 1 zu $\frac{1}{p^m}$ der umgekehrte des Logarithmen des Verhältnisses von 1 zu p^m. Der Logarithme des Verhältnisses von 1 zu $\frac{1}{p^m}$ aber ist m; folglich der Logarithme des Verhältnisses von 1 zu $\frac{1}{p^m}$,....-m; und das Glied $\frac{1}{p^m}$ wird auch unter der Exponentialform p^{-m} dargestellt.

Was die Einheit betrift, so ist ihr Verhältnis zu ihr selbst nicht aus Verhältnissen, die dem von 1 zu p gleich sind, zusammengesezt; ihr Logarithme ist 0; und die Einheit wird unter der Exponentialform p° dargestellt; so daß man hat $p^\circ = 1$, was auch der Werth von p seyn mag.

Die vollständige geometrische Reyhe, deren erstes Glied zum zweyten das Verhältnis von 1 zu p hat, läßt sich demnach auf folgende Art darstellen:

$$p^{-n}, p^{-n+1}, p^{-n+2} \ldots p^{-3}, p^{-2}, p^{-1}, p^\circ, p^1, p^2, p^3, \ldots p^{n-2}, p^{n-1}, p^n$$

§. 179.

In dieser Reyhe hat man, um das Quadrat eines Glieds zu nehmen, seinen Exponenten zu verdoppeln. Das Verhältnis von 1 zu p^{2m} ist nämlich aus zwey Verhältnissen, die dem von 1 zu p^m gleich sind, zusammengesezt, oder es ist das duplicirte des Verhältnisses von 1 zu p^m; mithin ist der Logarithme des Verhältnisses von 1 zu p^{2m} das Doppelte vom Logarithmen des Verhältnisses von 1 zu p^m: und folglich der Logarithme des Quadrats von p^m das Doppelte des Logarithmen von p^m.

Man zeigt ebenso, daß man, um die dritte, vierte, fünfte, sechste .... rte Potenz eines Glieds zu nehmen, seinen Exponenten oder Logarithmen zu verdoppeln, sein Dreyfaches, Vierfaches, Fünffaches, Sechsfaches... rfaches zu nehmen hat.

Folglich reducirt sich die Erhebung eines Glieds auf eine Potenz von einem gegebenen Exponenten auf die Multiplication des Logarithmen dieses Glieds durch den genannten Exponenten.

Umgekehrt. Um die Quadratwurzel einer Zahl auszuziehen, hat man die Hälfte ihres Logarithmen oder ihres Exponenten zu nehmen; denn da der Logarithme des Quadrats das Doppelte vom Logarithmen der Wurzel ist; so ist der Logarithme der Wurzel die Hälfte vom Logarithmen des Quadrats.

Ebenso ist der Logarithme der Cubikwurzel das Drittel vom Logarithmen der Zahl, von der sie ausgezogen werden soll; und die Logarithmen

der vierten, fünften, sechsten . . . . mten Wurzel

sind beziehungsweise

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots \frac{1}{m}$$

des Logarithmen der Zahl, woraus sie ausgezogen werden soll.

Es seyen zwey Glieder p^m, $p^{m'}$, deren Produkt man nehmen soll; und dis Produkt sey p^M. Das Verhältnis von 1 zu $p^m \times p^{m'}$ ist zusammengesezt aus $m + m'$ Verhältnissen, die dem von 1 zu p gleich sind; mithin ist der Logarithme von $pm \times pm' \ldots m + m'$. Um also das Produkt zweyer Glieder zu machen, hat man nur die Summe ihrer Exponenten oder Logarithmen zu nehmen.

Umgekehrt. Um von zwey Gliedern eines durch das andere zu dividiren, hat man die Differenz ihrer Exponenten oder Logarithmen zu nehmen.

Und wie das Verfahren nach der Regel de Tri darinn besteht, daß man das Produkt der mittlern Glieder nimmt, und dasselbe durch das erste Glied dividirt; so findet man den Logarithmen des vierten Glieds einer Proportion, indem man von der Summe der Logarithmen der mittlern Glieder den Logarithmen des ersten Glieds abzieht.

So

So lassen sich demnach vermittelst einer geometrischen Reyhe, deren jedes Glied von seinem Exponenten oder Logarithmen begleitet ist, sofern man es als eine Potenz seines zweyten Glieds ansieht, die vornehmsten Operationen der Arithmetik (ausser der Addition und Subtraction) so vereinfachen, daß die Multiplication zweyer Glieder durch Addition ihrer Logarithmen, die Division zweyer Glieder durch Subtraction ihrer Logarithmen, die Erhebung eines Glieds auf eine Potenz durch Multiplication des Logarithmen dieses Glieds mit dem Exponenten der Potenz, und die Ausziehung der Wurzel eines Glieds vermittelst der Division des Logarithmen dieses Glieds durch den Exponenten der Wurzel bewerkstelligt wird.

Die Schwürigkeit ist aber nun, eine solche Reyhe so, daß die natürlichen Zahlen in derselben als Potenzen des zweyten Glieds dargestellt werden, und mit den Exponenten dieser Potenzen zu berechnen.

In der That, wenn man als zweytes Glied zum Beyspiel die Zahl zwey nimmt, wird die Reyhe nur aus Potenzen von zwey bestehen; alle dazwischen fallende Glieder, 3, 5, 6, 7, 9, 10....15, 17....31,.... werden aus derselben ausgeschlossen seyn. Und die Anzahl der ausgeschlossenen ganzen Zahlen wird um so grösser seyn, je grösser das zweyte Glied seyn wird.

Um dieser Schwürigkeit zu begegnen, hat man als zweytes Glied eine gebrochene nicht viel von der Einheit verschiedene Zahl genommen, so daß die natürliche Zahlen Potenzen dieser Zahl waren, oder vielmehr solchen sehr nahe kamen; und nach diesem Grundsaz hat man Tafeln berechnet, welche Logarithmentafeln heissen.

In den gewöhnlichen Tafeln hat man eine Progression von der Beschaffenheit zu Grund gelegt, daß die Zahl 10 das 10 000 ooote Glied nach dem ersten, oder die 10 000 ooote Potenz des zweyten Glieds ist; sodenn finden sich die

Zahlen	2	als die	3 010 300ten
	3	. .	4 771 213
	4	. .	6 020 600
	5	. .	6 989 700
	6	. .	7 781 813
	7	. .	8 450 980
	8	. .	9 030 900
	9	. .	9 542 425

Potenzen des zweyten Glieds, wenigstens mit einer Genauigkeit, die in den meisten vermittelst dieser Tafeln zu bewerkstelligenden Rechnungen hinreichen kann.

Hieraus folgt, daß die Logarithmen der Zahl zehen und ihrer Potenzen 100, 1000, 10000, 100000.... 10n beziehungsweise sind . . . . . die Einheit,

zwey, drey, vier, fünf . . . . n

mit sieben darauf folgenden Nullen; daß die Logarithmen der zwischen 1 und 10 fallenden Zahlen höchstens aus sieben Charakteren bestehen; die Logarithmen der zwischen 10 und 100 fallenden Zahlen zum ersten Charakter eins, die Logarithmen der zwischen 100 und 1000 fallenden Zahlen zum ersten Charakter zwey, die Logarithmen der zwischen 1000 und 10000 fallenden Zahlen zum ersten Charakter drey, die Logarithmen der zwischen 10000 und 100000 fallenden Zahlen zum ersten Charakter vier..... die Logarithmen der zwischen 10^n und 10^{n+1} fallenden Zahlen zum ersten Charakter n haben (wenn n eine ganze Zahl ist, die kleiner ist als 10.)

Hieraus folgt, daß die Größe der ersten zur linken Hand eines Logarithmen befindlichen Ziffer, (welche kleiner als 10 vorausgesezt wird) als Merkmal in Absicht auf die Größe der correspondirenden Zahl dient, und Aufschluß darüber gibt, zwischen welchen Potenzen von 10 sich dieselbe befindet, oder aus wie vielen Ziffern sie besteht. Daher hat man diese erste Ziffer die Charakteristik genannt, und die ihr zur Rechten folgenden Ziffern machen die Mantisse aus.

Um eine Zahl mit 10, 100, 1000, 10000, 100000.... 10^n zu multipliciren, hat man nur ihrer Charakteristik

eine, zwey, drey, vier, fünf . . . n

Einheiten zuzusezen; und umgekehrt, um eine Zahl durch

10, 100, 1000, 10000, 100000 . . . . n

zu dividiren, hat man von ihrer Charakteristik

eine, zwey, drey, vier, fünf . . . n

Einheiten abzuziehen. Hat man bey dieser Subtraction mehr abzuziehen, als in der Charakteristik ist, so daß man eine negative Charakteristik erhält; so gehören die correspondirende Logarithmen eigentlichen Brüchen zu: nämlich die Brüche

$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000} \cdots \frac{1}{10^n}$

haben beziehungsweise zu Logarithmen

-1, -2, -3, -4, -5, ... -n;

und die zwischen 1 und 0,1; 0,1 und 0,01; 0,01 und 0,001; 0,001 und 0,0001; 0,0001 und 0,00001 . . . . $\frac{1}{10^n}$ und $\frac{1}{10^{n+1}}$ fallende Brüche haben beziehungsweise zur Charakteristik ihrer Logarithmen -1, -2, -3, -4, -5, ... -n; so daß die Veränderung des Zeichens der Charakteristik die Entgegensezung der mit ganzen Zahlen und mit Brüchen desselben Namens vorgenommenen Operationen anzeigt. Nämlich die Multiplication durch einen Bruch lauft auf eine Division, und die Division auf eine Multiplication hinaus.

Fertigkeit im Gebrauch der Tafeln und Leichtigkeit in logarithmischen Rechnungen erwirbt man sich durch Gebrauch und häufige Uebung. Ich will mich begnügen durch einige wenige Beyspiele Anweisung dazu zu geben.

Die Charakteristik als vornehmster Theil des Logarithmen wird von der Mantisse zur Unterscheidung durch einen Punkt getrennt, so daß die Mantisse alsdenn unter der Form eines der Charakteristik beygefügten Decimalbruchs erscheint.

Erstes Beyspiel in Beziehung auf Multiplicationen.
124 durch 68 multipliciren.

Log. 68 = 1.8325089
Log. 124 = 2.0934217

Summe oder Log. des Products = 3.9259306
correspondirende Zahl oder Product = 8432

Zweytes Beyspiel in Beziehung auf Division.
33264 durch 63 dividiren.

Log. 33264 = 4.5219745
Log. 63 = 1.7993405

Differenz oder Log. des Quotienten = 2.7226340
correspondirende Zahl oder Quotient = 528

Drittes Beyspiel in Beziehung auf die Regel de Tri.
Das vierte Glied einer Proportion finden, deren drey erste Glieder 21, 35, 96 sind.

Log. 96 = 1.9822712
Log. 35 = 1.5440680

Summe = 3.5263392
Log. 21 = 1.3222193

Differenz = 2.2041199
correspondirende oder gesuchte Zahl = 160

Viertes Beyspiel in Beziehung auf die Erhebung auf Potenzen.

1°. Das Quadrat von 36 nehmen.

Log. 36 = 1.5563025
Doppeltes oder Log. des Quadrats = 3.1126050
correspondirende Zahl oder Quadrat = 1296.

2°. Den Cubus von 27 nehmen.

Log. 27 = 1.4313638
Dreyfaches oder Log. des Cubus = 4.2940914
correspondirende Zahl oder Cubus = 19683.

3°. Die vierte Potenz von 18 nehmen.

Log. 18 = 1.2552725
Vierfaches oder Log. der vierten Potenz = 5.0210900
correspondirende Zahl oder vierte Potenz = 104976

Fünftes Beyspiel in Beziehung auf Wurzelauszie-hung.

1°. Was ist die Quadratwurzel von 1024?

Log. 1024 = 3.0103000
Hälfte oder Log. der Wurzel = 1.5051500
correspondirende Zahl oder Wurzel = 32

2°. Was ist die Cubikwurzel von 21952?

Log. 21952 = 4.3414741
Drittel oder Log. der Wurzel = 1.4471580
correspondirende Zahl oder Wurzel = 28

3°. Was ist die vierte Wurzel von 38416?

Log. 38416 = 4.5845121
Viertel oder Log. der Wurzel = 1.1461280
correspondirende Zahl oder Wurzel = 14

Sechstes Beyspiel in Beziehung auf Brüche.

1°. Was ist das Interesse von 2348 zu 6 p. C.?

Log. 2348 = 4.3706981
Log. $\frac{6}{100}$ = -2.7781513
Log. des Products = 2.1488494
correspondirende Zahl oder Interesse = 140,88

2°. Man hat 54600 Gulden auf Interesse gelegt; sie haben 2730 gebracht; man fragt nach dem Zinsfuß.

Log. 2730 = 3.4361626
Log. 54600 = 5.7371926
Differenz = -2.6989700
correspondirende Zahl oder Zinsfuß = 0,05

Man hätte die Brüche und negative Charakteristiken vermeiden können, wenn man den Zinsfuß nicht in Beziehung auf die Einheit, sondern in Beziehung auf 100 gesucht hätte: welches sodenn darauf hinauslauft, die Regel de Tri für die drey ersten Glieder 54600, 2730, und 100 anzuwenden. Man hätte

Log. 100 × 2730 = 5.4361626
Log. 54600 = 5.7371926
Differenz = 0.6989700

correspondirende Zahl oder Zinsfuß = 5.

3°. Man hat ein Kapital auf Interesse zu 6 p. C. ausgeliehen; es hat 5436 Gulden gebracht: wie groß war das Kapital?

Log. 5456 = 3.7352794
Log. 0,06 = -2.7781513
Rest = 4.9571281

correspondirende Zahl oder Kapital = 90600

Man hätte die Brüche und die Subtraction einer negativen Charakteristik vermieden, wenn man den Zinsfuß nicht in Beziehung auf die Einheit, sondern in Beziehung auf 100 gesucht hätte.

Log. 100 × 5436 = 5.7352794
Log. 6 = 0.7781513
Rest = 4.9571281

Ich habe in den bisherigen Beyspielen Zahlen von der Beschaffenheit gewählt, daß man in den Tafeln die Resultate der Rechnungen finden und die den erhaltenen Logarithmen correspondirenden Zahlen bestimmen konnte. Obgleich die gewönlichen Tafeln sich unmittelbar nicht über 100000 erstrecken; so kann man doch vermittelst derselben die Logarithmen der Zahlen bis zu 10 000 000 finden.

Um dis leichter zu bewerkstelligen, hat man kleine Tafeln verfertigt, welche Tafeln der Proportionaltheile heis-

sen; deren Beschaffenheit und Gebrauch ich nun zu erklären habe.

Wenn eine Zahl nur etwas groß ist, z. B. über 10000 und noch mehr über 100000; so folgen die Logarithmen mehrerer zunächst auf einander folgenden (mithin einer arithmetischen Progression folgenden) Zahlen auch so ziemlich einer arithmetischen Progression. So sind die Logarithmen der Zahlen

50000		4.6989700
50001	beziehungsweise	4.6989787
50002		4.6989874;

welche eine arithmetische Proportion bilden, deren gemeinschaftliche Differenz der Glieder 87 ist; und diese Eigenschaft erstrekt sich noch bis auf eine beträchtliche Entfernung von 50000; wie man sich durch die Ansicht der Tafeln überzeugen, und auch durch die Formeln, auf welche die Construktion derselben gegründet ist, Rechenschaft davon geben kann.

So ist Log. 50000 = 4.6989700
Log. 50100 = 4.6998377
Diff. = 0.0008677 oder 8677

Der 100ste Theil dieser Differenz, nämlich 86,77 ist sehr wenig von der Differenz 87 der Logarithmen zweyer auf einander folgenden zwischen 50000 und 50100 befindlichen Zahlen unterschieden.

Es sey z. B. die Zahl 50000, deren Logarithme ist 4.6989700; und man verlange den Logarithmen z. B. von 500004. Da die Differenz der Logarithmen zweyer auf einander folgenden Zahlen, 50000 und 50001 z. B., 87 ist; so ist die Differenz der Logarithmen der Zahlen 500000 und 500010, welche von jenen blos durch eine um eins größere Charakteristik unterschieden sind, auch 87; und die nächst auf einander folgenden Logarithmen der nun zwischen 500000 und 500010 liegenden Zahlen sind um den 10ten Theil von 87 oder um 8,7 von einander unterschieden. Demnach werden die Mantissen der Logarithmen der von 500000 bis

500010 gehenden natürlichen Zahlen einer arithmetischen Progression folgen, deren erstes Glied die Mantisse des Logarithmen von 500000, und deren gemeinschaftliche Differenz der Glieder der zehnte Theil von 87, nämlich 8,7 ist. Die Logarithmen der die Zahl 500000 um

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Einheiten übertreffenden Zahlen übertreffen folglich den Logarithmen von 500000 um die Größen

8'7, 17'4, 26'1, 34'8, 43'5, 52'2, 60'9, 69'6, 78'3, 87

statt deren man in den Tafeln die ihnen am nächsten kommenden ganzen Zahlen gesezt hat, welche beziehungsweise sind

9, 17, 26, 35, 43, 52, 61, 70, 78, 87.

Folglich kann man, wenn man die Logarithmen der Zahlen 50000 und 50001, und damit auch die Logarithmen der Zahlen 500000 und 500010 hat, die Logarithmen der zwischen 500000 und 500010 liegenden Zahlen vermittelst der Proportionaltheile erhalten.

Der Gebrauch dieser Tafeln erstrekt sich sogar bis auf Zahlen, welche zwischen 5000000 und 5000100 liegen. Die Logarithmen derselben wachsen nämlich auch in einer arithmetischen Progression, deren gemeinschaftliche Differenz $\frac{1}{100}$ der Differenz der Logarithmen dieser beyden lezten Zahlen ist, und man kann sie vermittelst der nur für die Zehentheile dieser Differenz berechneten Proportionaltheile erhalten.

Beyspiel. Es sey die Zahl 5000028, deren Logarithmen man verlangt. Der Zahl 2 als Differenz in den Zahlen entspricht 17 als Differenz in den Logarithmen. Der Differenz 8 in den Zahlen entspricht die Differenz 70 in den Logarithmen; mithin, da die Differenz der Zahlen nur 10mal so klein ist, so wird die Differenz der Logarithmen 10mal so klein oder 7 seyn. Man erhält demnach

Log.	5000000	=	6.6989700
für	. . 20	=	17
für	. . 8	=	7
Log.	5000028	=	6.6989724

Ein anderes Beyspiel. Man verlangt den Logarithmen von 7846976

Log.	7846900	=	6.8946981
für	. . 70	=	39
für	. . 6	=	3
Log.	7846976	=	6.8947023

Umgekehrt. Ist ein Logarithme gegeben, den man nicht unmittelbar in den Tafeln findet; so läßt sich die ihm entsprechende Zahl genau oder sehr nahe bis auf sieben Decimalziffern dieser Zahl finden.

Beyspiel. Es sey der Logarithme 6.7547284; man verlangt die ihm correspondirende Zahl.

Der nächste Logarithme, der unmittelbar kleiner ist als der gegebene, findet sich in den Tafeln . . 6.7547228, welchem (mit Beyseitsezung die Charakteristik) die Zahl 56849 correspondirt. Der Ueberschuß des gegebenen Logarithmen über diesen leztern ist 56; die nächste Differenz in den Proportionaltheilen ist 53; welcher die Zahl 7 als Differenz in den Zahlen entspricht. Der Ueberschuß von 56 über 53 ist 3, welches die erste Ziffer der Differenz 30 in den Tafeln ist, welcher die Zahl 4 entspricht. Demnach ist die dem gegebenen Logarithmen correspondirende Zahl 5684974.

Tafellogarithme, der dem gegebenen
am nächsten kommt, ... 6.7547228
correspondirende Zahl 5684900
Differenz der gegebenen und des Ta=
fellogarithmen 56
nächste Differenz in den Proportionaltheilen . . . 53
correspondirende Differenz in den Zahlen . . . 70
Differenz der beyden Zahlen 56 und 53 3
correspondirende Differenz in den Zahlen . . . 4
den gegebenen Log. correspondirende Zahl 5684974

Anderes Beyspiel. Gegebene Logarithme 4.5689742
nächster Tafellogarithme . . . 4.5689640
correspondirende Zahl 37065
Differenz des gegebenen und des Tafellog. . . 102
nächste Differenz in den Proportionaltheilen . . . 94
correspondirende Differenz in den Zahlen . . . 80
Differenz der beyden Zahlen 102 und 94 . . . 8
correspondirende Differenz in den Zahlen . . . 7
Den gegebenen Log. correspondirende Zahl 37065,87.

Der Gebrauch der Logarithmen und der Proportionaltheile ist vorzüglich nüzlich bey Reductionen der Brüche auf Decimalbrüche, und bey Ausziehungen von Wurzeln verschiedener Ordnungen.

Beyspiel. Man soll $\frac{3}{7}$ in einen Decimalbruch verwandeln.

Log. 3 = 0.4771213
Log. 7 = 0.8450980
Log. $\frac{3}{7}$ = -1.6320233
$\frac{3}{7}$ = 0,4285715

Zweytes Beyspiel. $\frac{8}{13}$ in einen Decimalbruch verwandeln.

Log. 8 = 0.9030900
Log. 13 = 1.1139434
Log. $\frac{8}{13}$ = -1.7891466
$\frac{8}{13}$ = 0.6153845

3tes Beyspiel. Die Quadratwurzel von zwey auszuziehen.

Log. 2 = 0.3010300
Log. $\sqrt{2}$ = 0.1505150
$\sqrt{2}$ = 1,414214

4tes Beyspiel. Die Quadratwurzel von fünf auszuziehen.

Log. 5 = 0.6989700
Log. $\sqrt{5}$ = 0.3494850
$\sqrt{5}$ = 2.236067

5tes Beyspiel. Die Cubikwurzel von 12 auszuziehen.

Log. 12 = 1.0791812
Log. $\sqrt[3]{12}$ = 0.3597271
$\sqrt[3]{12}$ = 2,289428

6tes Beyspiel. Die vierte Wurzel aus $\frac{2}{3}$ auszuziehen.

Log. 2 = 0.3010300
Log. 3 = 0.4771213
Log. $\frac{2}{3}$ = -1.8239087
Log. $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ = -1.9559772
$\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ = 0,903602

Ich gehe nun zu einigen Aufgaben über, welche sich auf Logarithmen beziehen.

§. 180.

Eine Person, welche 10000 Gulden besizt, und dieselbe zu 5 p. C. anbringt, bringt auch die hieraus erwachsenden Interessen auf den nämlichen Fuß, mithin zu zusammengesezten Interessen an. Man fragt, was sie nach Verfluß von 12 Jahren besizen wird?

Das Vermögen dieser Person am Ende des ersten Jahrs ist die $\frac{105}{100}$ oder $\frac{21}{20}$ dessen, was sie zu Anfang dieses Jahrs besaß;

Folglich wird ihr Vermögen am Ende des zweyten Jahrs die $\frac{21}{20}$ von diesen $\frac{21}{20}$, oder $(\frac{21}{20})^2$ ihres anfänglichen Vermögens sey.

Ebenso wird ihr Vermögen am Ende des dritten Jahrs die $\frac{21}{20}$ von diesen $(\frac{21}{20})^2$, oder die $(\frac{21}{20})^3$ ihres anfänglichen Vermögens seyn.

Und so weiter; so daß ihr Vermögen am Ende des 12ten Jahrs die $(\frac{21}{20})^{12}$ ihres anfänglichen Vermögens seyn wird.

Folglich wird ihr Vermögen nach Verfluß von 12 Jahren $(\frac{21}{20})^{12} \times$ 10000 seyn.

$$\text{Log. } \tfrac{21}{20} = 0.0211893$$
$$\text{Log. } (\tfrac{21}{20})^{12} = 0.2542716$$
$$\text{Log. } 10000 = \underline{4}$$
$$\text{Log. } (\tfrac{21}{20})^{12} \times 10000 = 4.2542716$$
$$(\tfrac{21}{20})^{12} \times 10000 = 17958{,}56$$

Andere Beyspiele. Eine Person, welche 15000 Gulden besizt, bringt dieselbe zu zusammengesezten Interessen zu 6 p. C. 15 Jahre lang an: was wird ihr Vermögen nach Verfluß dieser Zeit seyn?

Eine Person, welche 20000 Gulden besizt, bringt dieselbe 18 Jahre lang zu 6 p. C. an; eine andere, welche die nämliche Summe besizt, bringt dieselbe zu 3 p. C. halb:

jährig an. Was wird das Vermögen jeder derselben nach Verfluß der 18 Jahre seyn?

Das Vermögen der ersten derselben nach Verfluß von 18 Jahren wird seyn . . . . $(\frac{106}{100})^{18} \times 20000$

das Vermögen der zweyten aber . . . $(\frac{103}{100})^{36} \times 20000$

$\text{Log. } \frac{106}{100} = 0.0253059$

$\text{Log. } (\frac{106}{100})^{18} = 0.4555062$

$\text{Log. } 20000 = 4.3010300$

$\text{Log. } (\frac{106}{100})^{18} \times 20000 = 4.7565362$

$(\frac{106}{100})^{18} \times 20000 = 57086{,}85$

$\text{Log. } (\frac{103}{100}) = 0.0128372$

$\text{Log. } (\frac{103}{100})^{36} = 0.4621392$

$\text{Log. } 20000 = 4.3010300$

$\text{Log. } (\frac{103}{100})^{36} \times 20000 = 4.7631692$

$\text{Log. } (\frac{103}{100})^{36} \times 20000 = 57965{,}45$

Differenz 878,6

Man fragt nach dem Werth des nämlichen Kapitals nach Verfluß derselben Zeit, wenn dasselbe zu $\frac{1}{2}$ p. C. monatlich angebracht wird.

Der Werth des genannten Kapitals nach Verfluß von 18 Jahren wird seyn . . . $(\frac{100\frac{1}{2}}{100})^{216} \times 20000$

$= (\frac{201}{200})^{216} \times 20000$

$\text{Log. } \frac{210}{200} = 0.0021661$

$\text{Log. } (\frac{210}{200})^{216} = 0.4678776$

$\text{Log. } 20000 = 4.3010300$

$\text{Log. } (\frac{210}{200})^{216} \times 20000 = 4.7689076$

$(\frac{210}{200})^{216} \times 20000 = 58736{,}43$

Allgemein. Man verlangt den Werth von s' aus der Gleichung $s' = s \times r^n$, wo r größer als die Einheit vorausgesezt wird.

§. 181.

Eine Stadt, welche 10000 Einwohner enthält, enthält nach Verfluß von 25 Jahren 15000 Einwohner. Man fragt nach der jährlichen Zunahme ihrer Bevölkerung.

Die jährliche Zunahme der Bevölkerung sey so beschaffen, daß sie für 10000 Einwohner x sey.

So hat man $(\frac{10000+x}{10000})^{25} \times 10000 = 15000$

und $(\frac{10000+x}{10000})^{25} = \frac{15000}{10000} = 1,5$

folglich 25 Log. $\frac{10000+x}{10000}$ = Log. 1'5

und Log. $\frac{10000+x}{10000} = \frac{1}{25}$ Log. 1'5

Log. 1'5 = 0.1760915

$\frac{1}{25}$ Log. 1'5 = 0.0070436 = Log. $\frac{10000+x}{10000}$.

$\frac{10000+x}{10000} = 1,016351$

$10000+x = 10163,51$

$x = 163,51$

folglich beträgt die jährliche Bevölkerung ungefehr 163 auf 10000.

Andere Beyspiele. Eine Person, welche 10000 Gulden besizt, bringt dieselbe auf zusammengesezte Interessen an, und besizt nach Verfluß von 18 Jahren 20000 Gulden. Was war der Zinsfuß?

Allgemein: Man löst die Gleichung $s' = s \times r^n$ auf, in welcher man r in s', s und n bestimmt; vermittelst der Gleichung Log. $r = \frac{1}{n}$ Log. $\frac{s'}{s}$.

§. 182.

Ich bin jemand die in 12 Jahren zahlbare Summe von 10000 Gulden schuldig. Wieviel muß ich ihm jezt bezahlen; zusammengesezes Interesse zu 5 p. C. vorausgesezt?

Sey s die Summe, welche ich jezt zu bezahlen habe, um die Schuld zu berichtigen. Diese Summe 12 Jahre

lang in Zinsen gethan, wird $s \times (\frac{105}{100})^{12}$. Dieser leztere Werth soll aber 10000 Gulden werden. Man hat mithin die Gleichnng

$$(\tfrac{105}{100})^{12} \times s = 10000$$

$$\text{daher } s = \frac{10000}{(\frac{105}{100})^{12}} = (\tfrac{100}{105})^{12} \times 10000$$

$$\text{Log. } \tfrac{105}{100} = 0.0211893$$

$$\text{Log.}(\tfrac{105}{100})^{12} = 0.2542716$$

$$\text{Log. } 10000 = 4$$

$$\text{Log. } \frac{10000}{(\frac{105}{100})^{12}} = 3.7457284$$

$$s = \frac{10000}{(\frac{105}{100})^{12}} = 5568{,}38.$$

Andere Beyspiele. Welche Summe werde ich jezt gleich zu bezahlen haben, um mich einer in 15 Jahren abzutragenden Schuld von 15000 Gulden zu entledigen, das Interesse zu 6 p. C. gesezt?

Die Bevölkerung eines Staats vermehrt sich jährlich um $\frac{1}{100}$; und die jezige Anzahl seiner Einwohner ist 100000. Was war seine Bevölkerung vor 100 Jahren?

Allgemein. Man soll in der Gleichung $s \times r^n = s'$, wo r grösser als die Einheit vorausgesezt wird, s bestimmen; oder s in der Gleichung $s = s' \times r^n$, wo r kleiner als die Einheit vorausgesezt wird.

§. 183.

Die Bevölkerung eines Staats, welcher 100000 Seelen enthält, wächst jährlich um ein Hundertheil. Nach Verfluß von wieviel Jahren wird seine Bevölkerung doppelt so gros seyn?

Die gesuchte Anzahl von Jahren sey n.

Man hat die Gleichung $(\frac{101}{100})^n \cdot 100000 = 200000$

oder $(\frac{101}{100})^n = 2$

daher $n \text{ Log. } \frac{101}{100} = \text{Log. } 2$

$$n = \frac{\text{Log. } 2}{\text{Log. } \frac{101}{100}}$$

$\text{Log. } 2 = 0.3010300$
$\text{Log. } \frac{101}{100} = 0.0043214$ daher $n = \frac{3010300}{43214} = 69,66$

Mithin wird die Bevölkerung dieses Staats nach Verfluß von 69 Jahren und ungefehr acht Monaten doppelt so gros seyn.

Andere Beyspiele. Eine Person, welche 20000 Gulden besizt, bringt dieselbe zu 5 p. C. an. Man fragt, nach Verfluß von wieviel Jahren dieselbe 30000 besizen wird?

Diese Person bringt ihre 20000 Gulden halbjährig zu $2\frac{1}{2}$ p. C. an. Man fragt, nach Verfluß von wieviel Jahren sie 30000 Gulden besizen wird.

Allgemein. Man verlangt in der Gleichung $s \times r^n = s'$, den Werth von n, indem man s, r und s' kennt. Man hat hiezu die Gleichung $n \text{ Log. } r = \text{Log. } \frac{s'}{s} = \text{Log. } s' - \text{Log. } s$.

Anmerkung. Wenn eine Person, welche die Summe s besizt, dieselbe so anbringt, daß sie von derselben entweder gewinnt oder verliert, das heißt, daß diese Summe entweder jährlich in einer geometrischen Progression zunimmt, oder jährlich in einer geometrischen Progression abnimmt; so kann diese Summe niemals Null werden, und noch vielweniger sich jemals in Schulden verwandeln. Was mithin auch der Werth der positiven Größe r, welche größer oder kleiner als die Einheit ist, seyn mag; so kann man, wenn die Größe s in der Gleichung $s \times r^n = s'$ positiv ist, niemals s' negativ bekommen; oder die Gleichung $s \times r^n = -s'$ enthält einen Widerspruch; und folglich enthält auch die Gleichung $n \text{ Log. } r = \text{Log. } \frac{-s'}{s} = \text{Log. } -s' - \text{Log } s$ einen Widerspruch

spruch, und der Werth von $n = \frac{\text{Log.} -s' - \text{Log.} s}{\text{Log.} r}$ ist mithin unmöglich. Nun kann aber diese Unmöglichkeit nicht von den reellen Logarithmen der positiven Größen s und r herrühren; folglich rührt sie vom Ausdruk Log. $-s'$ her; und mithin ist Log. $-s'$ unmöglich. Aber s' kann jede positive Größe vorstellen; und $-s'$ kann jede negative Größe vorstellen; folglich ist der Logarithme einer negativen Größe unmöglich.

Ebenso wie ein Vermögen, das sich jährlich auf einen gewissen Theil von sich selbst reducirt, niemals eine Schuld werden kann; so kann umgekehrt eine Schuld, welche sich jährlich auf einen gewissen Theil von ihr selbst reducirt, oder um einen gewissen Theil von ihr selbst wächst, sich nicht in Vermögen verwandeln. So enthält die Gleichung $-s \times r^n = +s'$ einen Widerspruch; und es gibt keinen Werth von n, welcher der Gleichung

$$r^n = \frac{+s'}{-s} = -\frac{s'}{s}$$

Genüge leisten könnte. Mithin ist der Ausdruk von

$$n = \frac{\text{Log.} s' - \text{Log.} -s}{\text{Log.} r}$$

widersprechend oder unmöglich; und folglich, vermöge des nämlichen Räsonnements wie vorhin, Log. $-s$ oder der Logarithme irgend einer negativen Größe unmöglich.

Aber wenn man die Gleichung hätte $-s \times r^n = -s'$; so ist nicht unmöglich, daß eine Schuld, welche jährlich in einem gegebenen Verhältnis zu- oder abnimmt, eine Schuld von gegebener Größe werde: folglich ist der Ausdruk

$$n = \frac{\text{Log.} -s' - \text{Log.} -s}{\text{Log.} r}$$

möglich; mithin schliessen die unmöglichen Ausdrüke Log. $-s'$, Log. $-s$ einerley unmögliche Größe in sich, welche sich durch Subtraction aufhebt. Und da die Gleichung $-s \times r^n = -s'$ einerley ist mit der Gleichung $s \times r^n = s'$; so ist auch die Gleichung

$$n = \frac{\text{Log.} -s' - \text{Log.} -s}{\text{Log.} r}$$

einerley mit der Gleichung

$$n = \frac{\text{Log. } s' - \text{Log. } s}{\text{Log. } r};$$

und folglich sind die Logarithmen der negativ genannten Grösfen $-s'$ und $-s$ um einerley Größe von den Logarithmen der positiven Größen $+s'$ und $+s$ unterschieden; man erhält nämlich, wenn man die beyden Ausdrüke von n einander gleich sezt,

$$\text{Log. } s' - \text{Log. } s = \text{Log. } -s' - \text{Log. } -s,$$

und folglich

$$\text{Log. } s' - \text{Log. } -s' = \text{Log. } s - \text{Log. } -s$$

In der That, wie man $-s$ unter der Form $-1 \times s$ darstellt, hat man $\text{Log. } -s = \text{Log. } -1 + \text{Log. } s$; und mithin ist die Unmöglichkeit des Logarithmen einer negativ genannten Größe auf die Unmöglichkeit von Log. -1 reducirt; beynahe wie die Unmöglichkeit der Quadratwurzel einer negativen Zahl auf die Unmöglichkeit der Wurzel von -1 zurükgeführt worden ist.

Ich werde in der Folge wieder auf die Frage über die Logarithmen der negativ genannten Größen zurükkommen, welche mehrere Mathematiker beschäftigt hat, und über welche sie verschiedene Meinungen gehabt haben.

Zweyte Anmerkung. In der Gleichung $s \times r^n = s'$, oder $r^n = \frac{s'}{s}$, und $n = \frac{\text{Log. } s' - \text{Log. } s}{\text{Log. } r}$, hat man, wenn $r = 1$, Log. $r = 0$; und wenn s' nicht $= s$ ist, erhält man $n = \frac{\text{Log. } s' - \text{Log. } s}{0}$, welches das Zeichen der Unmöglichkeit ist. Was nämlich immer die Anzahl der Jahre seyn mag, während deren man eine Summe, welche weder zu- noch abnimmt, liegen läßt, so bleibt dieselbe immer die nämliche, oder es ist unmöglich, eine Zeit zu bestimmen, nach deren Verfluß sie eine gegebene Veränderung erlitten haben könnte. Sagt man aber, daß sie keine Veränderung erlitten habe, d. h. ist s' gleich s gegeben; so hat man $n = \frac{0}{0}$, welches die Un-

bestimmtheit der Aufgabe anzeigt, oder daß man jede Anzahl von Jahren nehmen kann, welche man will.

§. 184.

Eine Person, welche 12000 Gulden besizt, bringt dieselbe auf zusammengesezтes Interesse zu 5 p. C. an; und eine Person, welche 10000 Gulden besizt, bringt dieselbe auf zusammengesezтes Interesse zu 6 p. C. an. Man fragt, nach Verfluß von wieviel Jahren diese beyde Personen gleich reich seyn werden?

Ben. Die gesuchte Anzahl von Jahren sey . . . n

Das Vermögen der ersten Person nach Verfluß von n Jahren wird seyn . . . . $(\frac{105}{100})^n \times 12000$

das Vermögen der zweyten aber . . . . $(\frac{106}{100})^n \times 10000$

Bed. Man hat mithin die Gleichung

$$(\tfrac{106}{100})^n \cdot 10000 = (\tfrac{105}{100})^n \times 12000$$

Red. $(\frac{106}{105})^n = \frac{12}{10} = 1'2$

$$n \operatorname{Log}. \tfrac{106}{105} = \operatorname{Log}. 1'2.$$

Aufl. $$n = \frac{\operatorname{Log}. 1'2}{\operatorname{Log}. 106 - \operatorname{Log}. 105}$$

$\operatorname{Log}. 1'2 = 0.0791812$
$\operatorname{Log}. \frac{106}{105} = 0.0041166$

$$n = \frac{0,0791812}{0,0041166}$$

$$= \frac{791812}{41166} = 19,234$$

folglich werden die beyden Kapitale ungefehr nach Verfluß von 19 Jahren und 3 Monaten gleich seyn.

Allgemein. Man löst die Gleichung auf

$$s \times r^n = s' \times r'^n,$$

welche sich reducirt auf

$$\left(\frac{r}{r'}\right)^n = \frac{s'}{s}; \; n \operatorname{Log}. \frac{r}{r'} = \operatorname{Log}. \frac{s'}{s}$$

$$n = \frac{\operatorname{Log}. s' - \operatorname{Log}. s}{\operatorname{Log}. r - \operatorname{Log}. r'}$$

Mithin ist diese Aufgabe, welche von der vorhergehenden verschieden schien, mit ihr im Grunde einerley.

Damit sie möglich sey, müssen s und s' entweder beyde positiv, oder beyde negativ seyn; und wenn $r=r'$, so muß man auch haben $s=s'$; und alsdenn kann n jeden beliebigen Werth haben.

In der Gleichung $s \times r^n = s' \times r'^n$ läßt sich, wenn von den fünf Größen s, s', r, r' und n, irgend vier gegeben sind, die fünfte derselben bestimmen.

Gegeben	Gesucht	
s, s', r, r';	n;	$n = \frac{\text{Log. } s' - \text{Log. } s}{\text{Log. } r - \text{Log. } r'}$
s, s', r,	n; r';	$\text{Log. } r' = \frac{\text{Log. } s - \text{Log. } s'}{n} + \text{Log. } r$
s,	r, r', n; s';	$s' = s \times \left(\frac{r}{r'}\right)^n$

§. 185.

Eine Person bringt ein Kapital von 6500 Gulden zu 3 p. C. halbjährig an; und ein Kapital von 6000 Gulden zu 6 p. C. jährlich. Man fragt, nach Verfluß von wieviel Jahren die beyden Kapitale gleich seyn werden?

Ben. Gesuchte Anzahl von Jahren . . . . . n

Werth des ersten Kapitals nach Verfluß dieser Zeit . . . $\left(\frac{103}{100}\right)^{2n} \times 5600$

. . . . zweyten . . . . . $\left(\frac{106}{100}\right)^{n} \times 6000$

Bed. $\left(\frac{103}{100}\right)^{2n} \times 5600 = \left(\frac{106}{100}\right)^{n} \times 6000$

Red. $\text{Log. } 5600 + 2n \text{ Log. } \frac{103}{100} = \text{Log. } 6000 + n \text{ Log. } \frac{106}{100}$

oder $\text{Log. } 5600 + n \text{ Log.} \left(\frac{103}{100}\right)^2 = \text{Log. } 6000 + n \text{ Log. } \frac{106}{100}$

$n \text{ Log.} \left(\frac{103}{100}\right)^2 - n \text{ Log. } \frac{106}{100} = \text{Log. } 6000 - \text{Log. } 5600$

$$n = \frac{\text{Log. } 6000 - \text{Log. } 5600}{2 \text{ Log. } \frac{103}{100} - \text{Log. } \frac{106}{100}}$$

Log. 6000 = 3.7781012 Log. $\frac{103}{100}$ = 0.0128372
Log. 5600 = 3.7481880 2Log. $\frac{103}{100}$ = 0.0256744
Diff. = 0.0299632 Log. $\frac{106}{100}$ = 0.0253059
Diff. = 0.0003685

$$n = \frac{299632}{3685} = 81{,}31.$$

Mithin werden die beyden Kapitale nach Verfluß von 81 Jahren und drey oder vier Monaten gleich seyn.

Werth des ersten Kapitals nach Verfluß von 81 Jahren — des zweyten

$(\frac{103}{100})^{162} \times 5600 = 672689$ $(\frac{106}{100})^{81} \times 6000 = 672867$

Werth des ersten Kapitals nach Verfluß von 82 Jahren — des zweyten

$(\frac{103}{100})^{164} \times 5600 = 713656$ $(\frac{106}{100})^{82} \times 6000 = 713290$

Allgemein. Man löst die Gleichung auf

$$s \times r^{2n} = s' \times r'^{n}, \text{ oder } s \times (r^2)^n = s' \times r'^{n},$$

so daß diese Aufgabe mit der des vorhergehenden §. einerley ist, wenn man r^2 statt r sezt.

Noch allgemeiner löst man die Gleichung auf

$$s \times r^{mn} : s' \times r'^{m'n} = p : p'$$

woraus man erhält

$$\frac{s}{p} \times r^{mn} = \frac{s'}{p'} \times r'^{m'n}, \text{ oder } \frac{s}{p} \times (r^m)^n = \frac{s'}{p'} \times (r'^{m'})^n$$

folglich $n \text{ Log. } r^m + \text{Log. } \frac{s}{p} = n \text{ Log. } r'^{m'} + \text{Log. } \frac{s'}{p'}$

$$n = \frac{\text{Log. } \frac{s}{p} - \text{Log. } \frac{s'}{p'}}{\text{Log. } r'^{m'} - \text{Log. } r^m}$$

Beyspiel. Man bringt 10000 Gulden zu $\frac{1}{2}$ p. C. monatlich, und wiederum 10000 Gulden zu 6 p. C. jährlich an. Man fragt, nach Verfluß von wieviel Jahren das erste Kapital das zweyte um ein Zotel übertreffen wird.

Man hat die Proportion

$$\left(\tfrac{201}{200}\right)^{12n} \times 10000 : \left(\tfrac{106}{100}\right)^{n} \times 10000 = 11 : 10$$

also $\left(\tfrac{201}{200}\right)^{12n} : \left(\tfrac{106}{100}\right)^{n} = 11 : 10$

$$10 \times \left(\tfrac{201}{200}\right)^{12n} = 11 \times \left(\tfrac{106}{100}\right)^{n}$$

$$\text{Log. } 10 + 12n \text{Log. } \tfrac{201}{200} = \text{Log. } 11 + n \text{ Log. } \tfrac{106}{100}$$

$$n = \frac{\text{Log. } 11 - \text{Log. } 10}{12 \text{ Log. } \tfrac{201}{200} - \text{Log. } \tfrac{106}{100}} = \frac{\text{Log. } 11}{12 \text{Log. } \tfrac{201}{200} - \text{Log. } \tfrac{106}{100}}$$

$$\text{Log. } 11 = 0.0413927$$

$$\text{Log. } \tfrac{201}{200} = 0.0021661$$

$$12 \text{ Log. } \tfrac{201}{200} = 0.0259932$$

$$\text{Log. } \tfrac{106}{100} = 0.0253059$$

$$12 \text{ Log. } \tfrac{201}{200} - \text{Log. } \tfrac{106}{100} = 0.0006873$$

$$n = \tfrac{413927}{6873} = 60\tfrac{1}{4} \text{ ungefehr.}$$

Dreyzehntes Kapitel.

Einleitung in die Methode der unbestimmten Coefficienten, und Anwendungen dieser Methode auf die Entwiklung einiger Functionen in Reyhen und auf Summationen verschiedener Reyhen.

§. 186.

Erklärung. Es sey eine Größe aus einer beständigen Größe, (welche auch Null seyn kann) und aus Potenzen einer veränderlichen von ganzen und positiven Exponenten zusammengesezt; so heißt erstere Größe eine ganze Function der veränderlichen Größe.

So sind die Potenzen einer veränderlichen Größe von ganzen und positiven Exponenten ganze Functionen dieser Größe; und die Summen oder Differenzen von Producten solcher Potenzen durch beständige Größen sind ebenfalls ganze Functionen dieser Größe.

Die Ordnung der ganzen Functionen einer veränderlichen Größe hängt von dem Exponenten der höchsten Potenz der veränderlichen in diesen Functionen ab. So wenn der Exponent der höchsten Potenz der veränderlichen

eins, zwey, drey, vier, ... m ist;

so heißt die Function beziehungsweise von der

ersten, zweyten, dritten, vierten, . . mten Ordnung.

Functionen	Ordnungen
$A+A'x$	erste
$A+A'x+A''x^2$	zweyte
$A+A'x+A''x^2+A'''x^3$ . . .	dritte
$A+A'x+A''x^2+A'''x^3+A^{IV}x^4$ . . .	vierte
u. s. w.	u. s. w.

Im Ausdruk einer Function machen die von der nämlichen Potenz der veränderlichen Größe afficirten Theile ein einziges Glied aus.

Lehrsaz. Es seyen zwey ganze Functionen einer veränderlichen Größe einander gleich, was auch der Werth der veränderlichen seyn mag: ich behaupte, daß die Coefficienten gleicher Potenzen der veränderlichen in diesen beyden Functionen einander gleich seyen.

Ich will den Beweis dieses Sazes durch einige Beyspiele einleiten.

Erstes Beyspiel. Sey $A+A'x = B+B'x$, was immer der Werth von x sey; ich behaupte, daß

$$A = B$$
$$A' = B'$$

Denn da $A+A'x=B+B'x$, was immer der Werth von x seyn mag; so hat diese Gleichheit namentlich Statt, wenn $x=o$; alsdenn verschwinden aber $A'x$ und $B'x$; mithin ist alsdenn $A=B$. Die Werthe von A und B aber sind von dem Werth von x unabhängig; folglich hat man immer $A=B$; daher auch immer $A'x=B'x$; mithin $A'=B'$.

Zweytes Beyspiel. Es sey

$$A+A'x+A''x^2 = B+B'x+B''x^2,$$

was immer der Werth von x sey; ich behaupte, daß

$$A = B,$$
$$A' = B',$$
$$A'' = B''.$$

Man hat wie vorhin $A=B$, wenn $x=o$; die Werthe von A und B sind von dem Werth von x unabhängig; folglich hat man beständig $A=B$; und folglich auch

$$A'x+A''x^2 = B'x+B''x^2$$
$$\text{und } A' +A''x = B' +B''x$$

folglich (nach dem ersten Beyspiel) $A'=B'$

$$\text{und } A''=B''$$

Allgemein. Es seyen zwey Functionen der nämlichen veränderlichen Größe von der mten Ordnung einander gleich, was immer der Werth der veränderlichen sey, und es sey für alle niedrigere gleiche Functionen bewiesen, daß die Coefficienten gleicher Potenzen gleich seyen; ich behaupte, daß diese Gleichheit auch für die ersten Functionen Statt hat.

Es sey $A+A'x+A''x^2+A'''x^3+\ldots+A^M x^m$
$=B+B'x+B''x^2+B'''x^3+\ldots+B^M x^m$,

der Werth der veränderlichen x mag seyn was er will. So hat demnach diese Gleichheit namentlich Statt, wenn $x=o$. Alsdenn verschwinden aber alle die veränderliche enthaltenden Glieder; folglich ist alsdenn $A=B$. Die Werthe von A und B sind aber unabhängig von dem Werth von x; folglich hat man immer $A=B$, und daher auch immer

$$A'x+A''x^2+A'''x^3+\ldots\ldots+A^M x^m$$
$$= B'x+B''x^2+B'''x^3+\ldots\ldots+B^M x^m,$$

und folglich $A'+A''x+A'''x^2+\ldots\ldots+A^M x^{m-1}$
$$= B'+B''x+B'''x^2+\ldots\ldots+B^M x^{m-1};$$

vermöge der Vorausſezung aber ſind in lezterer Gleichung alle Coefficienten gleicher Potenzen der veränderlichen einander gleich; folglich ſind auch in den beyden erſten Functionen alle Coefficienten gleicher Potenzen der veränderlichen einander gleich.

Der Saz iſt aber für Functionen von der erſten und zweyten Ordnung wahr bewieſen worden; folglich iſt er auch für die Functionen von allen Ordnungen wahr.

Zuſaz. Insbeſondere: wenn eine ganze Function einer veränderlichen Größe beſtändig gleich Null iſt, was auch der Werth der veränderlichen ſeyn mag; ſo ſind die Coefficienten jedes Glieds dieſer Gleichung auch Null.

Ich will dieſe Grundſäze auf die Entwiklung einiger Functionen in Reyhen anwenden.

§. 187.

Man verlangt den Bruch $\frac{1}{1-x}$ in eine Reyhe zu entwickeln.

Sey $\frac{1}{1-x} = 1+A'x+A''x^2+A'''x^3+A^{IV}x^4+A^V x^5+\ldots$

wo die Coefficienten A', A'', A''', A^{IV}, $A^V\ldots$ unbeſtimmt ſind. So iſt folglich

$$1 = (1-x)(1+A'x+A''x^2+A'''x^3+A^{IV}x^4+\ldots)$$
$$= 1+A'x+A''x^2+A'''x^3+A^{IV}x^4+\ldots$$
$$- \quad (x+A'x^2+A''x^3+A'''x^4+\ldots)$$

folglich ist (§. 186) $A' - 1 = 0$; mithin $A = 1$

$A'' - A' = 0 \quad A'' = 1$

$A''' - A'' = 0 \quad A''' = 1$

$A^{IV} - A''' = 0 \quad A^{IV} = 1$

u. s. w. u. s. w.

Mithin ist $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots$

Ebenso $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots$

Anmerkung. Damit die Summe der entwickelten Glieder der zu entwickelnden Größe desto näher komme, je eine größere Anzahl von Gliedern entwickelt wird; so muß x kleiner als die Einheit seyn.

§. 188.

Zweyte Anwendung. Es sey der Bruch $\frac{1}{1-p'x+p''x^2}$ in eine Reyhe zu entwickeln.

Sey $\frac{1}{1-p'x+p''x_2} = 1+A'x+A''x^2+A'''x^3+A^{IV}x^4+A^{V}x^5$
$(+A^{VI}x^6+\ldots$

folglich $1 =$

$1+A'x+A''x^2+A'''x^3+A^{IV}x^4+A^{V}x^5+A^{VI}x^6+\ldots$
$-(p'x+p'A'x^2+p'A''x^3+p'A'''x^4+p'A^{IV}x^5+p'A^{V}x^6+\ldots)$
$-(p''x^2+p''A'x^3+p''A''x^4+p''A'''x^5+p''A^{IV}x^6+\ldots)$

So ist (§. 186) $A' - p' = 0$; daher $A' = p'$

$A'' - p'A' - p'' = 0 \quad A'' = p'A' + p''$

$A''' - p'A'' - p''A' = 0 \quad A''' = p'A'' + p''A'$

$A^{IV} - p'A''' - p''A'' = 0 \quad A^{IV} = p'A''' + p''A''$

$A^{V} - p'A^{IV} - p''A''' = 0 \quad A^{V} = p'A^{IV} + p''A'''$

$A^{V} - p'A^{V} - p''A^{IV} = 0 \quad A^{VI} = p'A^{V} + p''A^{IV}$

Folglich $A' = p'$

$A'' = p'^2 + p''$

$A''' = p'^3 + 2p'p''$

$A^{IV} = p'^4 + 3p'^2p'' + p''^2$

$A^{V} = p'^5 + 4p'^3p'' + 3p'p''^2$

$A^{VI} = p'^6 + 5p'^4p'' + 6p'^2p''^2 + p''^3$

$A^{VII} = p'^7 + 6p^5p'' + 10p'^3p''^2 + 4p'p''^3$

$A^{VIII} = p'^8 + 7p'^6p'' + 15p'^4p''^2 + 10p'^2p''^3 + p''^4$

Allgemein:

$$A^{2M} = p'^{2m} + \frac{2m-1}{1}p'^{2m-2}p'' + \frac{2m-2}{1}\cdot\frac{2m-3}{2}p'^{2m-4}p''^2 + \frac{2m-3}{1}\cdot\cdot\cdot$$
$$\frac{2m-5}{3}p'^{2m-6}p''^3 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m}{2}p'^2p''^{m-1} + p''^m$$

$$A^{2M+1} = p'^{2m+1} + \frac{2m}{1}p'^{2m-1}p'' + \frac{2m-1}{1}\cdot\frac{2m-2}{2}p'^{2m-3}p''^2 + \frac{2m-2}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{2m-4}{3}\times$$
$$p'^{2m-5}p''^3 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \frac{m+1}{1}p'p''^m$$

Beyspiele. Sey $p' = 1$; $p'' = 1$.

$$\frac{1}{1-x+x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + 21x^7 + 34x^8 + \cdot\cdot\cdot$$

$p' = 2$, $p' = -1$;

$$\frac{1}{1-2x+x^2}\left(= \frac{1}{(1-x)^2}\right) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + \cdot\cdot\cdot$$

$p' = -2$, $p'' = -1$;

$$\frac{1}{1+2x+x^2}\left(= \frac{(1+x)^2}{1}\right) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + 7x^6 - \cdot\cdot\cdot$$

Anmerkung und Erklärungen. Wenn man den Bruch $\frac{1}{1-p'x}$ in eine Reyhe entwickelt, so folgen die Coefficienten der Potenzen von x der geometrischen Progression $1, p', p'^2, p'^3, p'^4 \ldots$, in welcher jedes Glied das Product des vorhergehenden durch p' ist.

In der Reyhe, welche aus dem Bruch $\frac{1}{1-p'x-p''x^2}$ entwickelt wird, ist der Coefficient jedes Glieds die Summe der Producte der zwey vorhergehenden Glieder durch p' und durch p'' beziehungsweise.

Es sey eine Reyhe von Größen, deren jede die Summe (oder Differenz) der Producte mehrerer vorhergehender Glieder durch beständige Größen sey: diese Reyhe heißt eine recurrirende. Die beständigen Größen, durch welche man die Glieder der Reyhe multipliciren muß, um die folgenden Glieder hervorzubringen, machen die Relationsscale aus.

Die Ordnung einer recurrirenden Reyhe hängt von der Anzahl der Glieder der Relationsscale oder von der Anzahl der Glieder der Reyhe ab, deren Producte durch gegebene Zahlen das folgende Glied hervorbringen. So sind die geometrischen Progressionen, welche aus der Entwicklung des Bruchs $\frac{1}{1-p'x}$ entstehen, dessen Nenner eine Function der ersten Ordnung von der veränderlichen x ist, recurrirende Reyhen der ersten Ordnung. Die Reyhen, welche durch Entwicklung der Brüche $\frac{1}{1-p'x-p''x^2}$ entstehen, deren Nenner Functionen der zweyten Ordnung von der veränderlichen x sind, und deren Relationsscale p', p'' ist, sind recurrirende Reyhen der zweyten Ordnung. Wenn man den Bruch $\frac{1}{1-p'x-p''x2-p'''x3}$, dessen Nenner eine Function der dritten Ordnung von der veränderlichen x ist, in eine Reyhe entwickelt; so erhält man eine recurrirende Reyhe der dritten Ordnung, in welcher jedes Glied die Summe der Producte dreyer vorhergehenden durch die Glieder der Relationsscale p', p'', p''' ist. Allgemein: die Entwiklung von Brüchen, deren Nenner ganze Functionen einer veränderlichen Größe sind, in Reyhen, erzeugt recurrirende Reyhen von der nämlichen Ordnung mit diesen Functionen.

Die Lehre von den recurrirenden Reyhen spielt eine sehr große Rolle in den höhern Theilen der Mathematik

und ihren Anwendungen. Wir werden uns in diesen Anfangsgründen, wenn wir auf diesen Gegenstand zurükkommen, begnügen von den recurrirenden Reyhen der zweyten Ordnung zu reden.

§. 189.

Als ein neues Beyspiel der Anwendung der Methode der unbestimmten Größen will ich den Beweis des Binomialtheorems vermittelst derselben beybringen.

Lehnsaz. Die Differenz ähnlicher Potenzen zweyer Größen von ganzen und positiven Exponenten ist dem Product ihrer Differenz durch eine geometrische Reyhe gleich, deren erstes und lezes Glied ähnliche Potenzen dieser beyden Größen vom nächst niedrigern Exponenten sind.

Symbolisch. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3 + \ldots + b^{n-1})$

Erster Fall. Der Exponent sey eine ganze positive Zahl.

Sey $(1+x)^n=1+A'x+A''x^2+A'''x^3+A^{iv}x^4+A^vx^5+\ldots$

folglich $(1+x')^n=1+A'x'+A''x'^2+A'''x'^3+A^{iv}x'^4+A^vx'^5+\ldots$

Mithin $(1+x)^n-(1+x')^n=$

$A'(x-x')+A''(x^2-x'^2)+A'''(x^3-x'^3)+A^{iv}(x^4-x'^4)$
$+A^v(x^5-x'^5)+\ldots$

folglich $(x-x')((1+x)^{n-1}$
$+(1+x)^{n-2}(1+x')$
$+(1+x)^{n-3}(1+x')^2$
$+(1+x)^{n-4}(1+x')^3$
$\vdots$
$+(1+x)(1+x')^{n-2}$
$+(1+x')^{n-1})$

$$= (x-x')(A' + A''(x+x') + A'''(xx+xx'+x'x') + A^{IV}(x^3+x^2x'+xx'^2+x'^3) + A^{V}(x^4+x^3x'+x^2x'^2+xx'^3+x'^4) + \ldots + \ldots)$$

Daher, wenn man auf beyden Seiten durch $x-x'$ dividirt,

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n-1} &= A' \\
+(1+x)^{n-2}(1+x') &+ A''(x+x') \\
+(1+x)^{n-3}(1+x')^2 &+ A'''(x^2+xx'+x'^2) \\
+(1+x)^{n-4}(1+x')^3 &+ A^{IV}(x^3+x^2x'+xx'^2+x'^3) \\
+(1+x)^{n-4}(1+x')^4 &+ A^{V}(x^4+x^3x'+x^2x'^2+xx'^3+x'^4) \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
+(1+x)(1+x')^{n-2} & \\
+(1+x')^{n-1} &
\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat Statt, was immer die Werthe von x und x' in Rükſicht gegen einander ſeyn mögen; folglich hat ſie namentlich Statt, wenn $x = x'$; in welchem Fall man erhält

$$n(1+x)^{n-1} = A' + 2A''x + 3A'''x^2 + 4A^{IV}x^3 + 5A^{V}x^4 + 6A^{V}x^5 + \ldots$$

$$\text{und } n(1+x)^n = (1+x)(A' + 2A''x + 3A'''x^2 + 4A^{IV}x^3 + 5A^{V}x^4 + 6A^{VI}x^5 + \ldots)$$

$$\text{oder } n(1+A'x+A''x^2+A'''x^3+A^{IV}x^4+A^{V}x^5+A^{VI}x^6+\ldots)$$

$$= A' + \begin{matrix} 2A'' \\ A' \end{matrix}x + \begin{matrix} 3A''' \\ 2A'' \end{matrix}x^2 + \begin{matrix} 4A^{IV} \\ 3A''' \end{matrix}x^3 + \begin{matrix} 5A^{V} \\ 4A^{IV} \end{matrix}x^4 + \begin{matrix} 6A^{VI} \\ 5A^{V} \end{matrix}x^5 + \begin{matrix} 7A^{VII} \\ 6A^{VI} \end{matrix}x^6 + \ldots$$

$$A' = n \quad \text{oder} \quad A' = n$$

Daher $2A'' + A' = nA' \qquad 2A'' = (n-1)A'$

$$3A''' + 2A'' = nA'' \qquad 3A''' = (n-2)A''$$

$$4A^{IV} + 3A''' = nA''' \qquad 4A^{IV} = (n-4)A'''$$

$$5A^{V} + 4A^{IV} = nA^{IV} \qquad 5A^{V} = (n-5)A^{IV}$$

$$6A^{VI} + 5A^{V} = nA^{V} \qquad 6A^{VI} = (n-5)A^{V}$$

. . . . . .

oder $A' = n$

$$A'' = \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}$$

$$A''' = \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$A^{IV} = \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$A^{V} = \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$A^{VI} = \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

. . . . . .

. . . . . .

Folglich wenn n eine ganze und positive Zahl ist,

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}x^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-2}{3}x^3 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-3}{4}x^4 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-4}{5}x^5 + \ldots$$

welches mit §§. 152. 162. übereinstimmt.

Zweyter Fall. Der Exponent sey eine negative ganze Zahl.

Sey $\frac{1}{(1+x)^n} = 1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^{V}x^5 + \ldots$

folglich auch $\frac{1}{(1+x')^n} = 1 + A'x' + A''x'^2 + A'''x'^3 + A^{IV}x'^4 + A^{V}x'^5 + \ldots$

folglich $\frac{(1+x')^n-(1+x)^n}{(1+x)^n(1+x')^n} =$

$$(x-x')(A'+A''(x+x')+A'''(x^2+..+x'^2)+A^{iv}(x^3...x'^3)$$
$$+A^{v}(x^4...x'^4)+...)$$

$$=\frac{(x'-x)((1+x')^{n-1}+(1+x')^{n-2}(1+x)+(1+x')^{n-3}(1+x)^2+(1+x')^{n-4}(1+x)^3+...+(1+x')^{n-1})}{(1+x)^n\,(1+x')^n}$$

Dividirt man beyde Glieder durch $x-x'$, und ſezt in dem Quotienten $x=x'$; ſo erhält man

$$A'+2A''x+3A'''x^2+4A^{iv}x^3+5A^{v}x^4+6A^{vi}x^5+7A^{vii}x^6+...$$

$$=-\frac{n(1+x)^{n-1}}{(1+x)^n}=-n\times\frac{1}{(1+x)^{n-1}}=$$

folglich $(1+x)(A'+2A''x+3A'''x^2+4A^{iv}x^3+5A^{v}x^4$
$+6A^{vi}x^5+7A^{vii}x^6+...)$

$$=-n\times\frac{1}{(1+x)^n}$$

$$=-n(1+A'x+A''x^2+A'''x^3+A^{iv}x^4+A^{v}x^5+A^{vi}x^6+...)$$

$$=A'+\overset{2A''}{A'}x+\overset{3A'''}{2A''}x^2+\overset{4A^{iv}}{3A'''}x^3+\overset{5A^{v}}{4A^{iv}}x^4+\overset{6A^{vi}}{5A^{v}}x^5+\overset{7A^{vii}}{6A^{vi}}x^6$$
$$+...$$

Folglich $A'=-n$ $\quad A'=-n$

$2A''=-(n+1)A'$ $\quad A''=+\frac{n(n+1)}{1.2}$

$3A'''=-(n+2)A''$ $\quad A'''=-\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}$

$4A^{iv}=-(n+3)A'''$ $\quad A^{iv}=+\frac{n}{1}...\frac{n+3}{4}$

$5A^{v}=-(n+4)A^{iv}$ $\quad A^{v}=-\frac{n}{1}...\frac{n+4}{5}$

$6A^{vi}=-(n+5)A^{v}$ $\quad A^{vi}=+\frac{n}{1}...\frac{n+5}{6}$

$7A^{vii}=-(n+6)A^{vi}$ $\quad A^{vii}=-\frac{n}{1}...\frac{n+6}{7}$

. . . . . .

Mithin $\frac{1}{(1+x)^n} =$

$$1 - \frac{n}{1}x + \frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}x^2 - \frac{n}{1}\cdot\cdot\frac{n+2}{3}x^3 + \frac{n}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{n+3}{4}x^4 - \frac{n}{1}\cdot\cdot\cdot$$
$$\frac{n+4}{5}x^5 + \frac{n}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{n+5}{6}x^6 - \cdot\cdot\cdot$$

Dritter Fall. Der Exponent sey eine gebrochene positive Zahl.

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} =$$
$$1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^{V}x^5 + A^{VI}x^6 + \cdot\cdot\cdot$$
$$(1+x)^m =$$
$$(1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^{V}x^5 + A^{V}x^6 + \cdot\cdot\cdot)^n$$
$$(1+x')^m =$$
$$(1 + A'x' + A''x'^2 + A'''x'^3 + A^{IV}x'^4 + A^{V}x'^5 + A^{VI}x'^6 + \cdot\cdot\cdot)^n$$
$$(1+x)^m - (1+x')^m$$
$$= (1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^{V}x^5 + A^{VI}x^6 + \cdot\cdot\cdot)^n$$
$$- (1 + A'x' + A''x'^2 + A'''x'^3 + A^{IV}x'^4 + A^{V}x'^5 + A^{VI}x'^6 + \cdot\cdot\cdot)^n$$

Verrichtet man die angezeigten Subtractionen, dividirt beyde Glieder durch $x - x'$, sezt sodenn in den Quotienten $x = x'$; so erhält man

$$m(1+x)^{m-1} =$$
$$n(A' + 2A''x + 3A'''x^2 + 4A^{IV}x^3 + 5A^{V}x^4 + 6A^{VI}x^5 + \cdot\cdot\cdot)$$
$$\times(1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^{V}x^5 + A^{VI}x^6 + \cdot\cdot\cdot)^{n-1};$$
$$m(1+x)^{m-1}(1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^{V}x^5 + A^{VI}x^6 + \cdot\cdot\cdot)$$
$$= n(A' + 2A''x + 3A'''x^2 + 4A^{IV}x^3 + 5A^{V}x^4 + 6A^{VI}x^5 + \cdot\cdot\cdot)$$
$$\times(1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^{V}x^5 + A^{VI}x^6 + \cdot\cdot\cdot)^n$$
$$= n(A' + 2A''x + 3A'''x^2 A^4 A^{IV}x^3 + 5A^{V}x^4 + 6A^{VI}x^5 + \cdot\cdot\cdot)$$
$$\times(1+x)^m;$$
$$m(1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^{V}x^5 + A^{VI}x^6 + \cdot\cdot\cdot)$$
$$= n(A + 2A''x + 3A'''x^2 + 4A^{IV}x^3 + 5A^{V}x^4 + 6A^{VI}x^5 + \cdot\cdot\cdot)$$
$$\times(1+x)$$

$$= n\left(A' + {}^{2}_{A'}{}^{A''}x + {}^{3}_{2A''}{}^{A'''}x^2 + {}^{4}_{3A'''}{}^{A^{IV}}x^3 + {}^{5}_{4A^{IV}}{}^{A^{V}}x^4 + {}^{6}_{5A^{V}}{}^{A^{VI}}x^5 + {}^{7}_{6A^{VI}}{}^{A^{VII}}x^6 + \ldots\right)$$

$nA' = m \qquad A' = \frac{m}{n}$

$2nA'' + nA' = mA' \qquad A'' = \frac{\frac{m}{n}}{1} \cdot \frac{\frac{m}{n}-1}{2}$

$3nA''' + 2nA'' = mA'' \qquad A''' = \frac{\frac{m}{n}}{1} \cdot \frac{\frac{m}{n}-1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n}-2}{3}$

$4nA^{IV} + 3nA''' = mA''' \qquad A^{IV} = \frac{\frac{m}{n}}{1} \cdot \frac{\frac{m}{n}-1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n}-2}{3} \cdot \frac{\frac{m}{n}-3}{4}$

$5nA^{V} + 4nA^{IV} = mA^{IV} \qquad A^{V} = \frac{\frac{m}{n}}{1} \cdot \frac{\frac{m}{n}-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{\frac{m}{n}-4}{5}$

$\ldots \qquad A^{VI} = \frac{\frac{m}{n}}{1} \cdot \frac{\frac{m}{n}-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{\frac{m}{n}-5}{6}$

$\ldots \qquad A^{VII} = \frac{\frac{m}{n}}{1} \cdot \frac{\frac{m}{n}-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{\frac{m}{n}-6}{7}$

$\ldots \quad \ldots$

$\ldots \quad \ldots$

Folglich $(1+x)^{\frac{m}{n}} =$

$$1 + \frac{\frac{m}{n}}{1}x + \frac{\frac{m}{n}}{1} \cdot \frac{\frac{m}{n}-1}{2}x^2 + \frac{\frac{m}{n}}{1} \cdot \frac{\frac{m}{n}-1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n}-2}{3}x^3 + \frac{\frac{m}{n}}{1} \cdot \frac{\frac{m}{n}-1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n}-3}{4}x^4 + \ldots$$

Vierter Fall. Der Exponent sey eine gebrochene negative Zahl.

Sey $\frac{1}{(1+x)^{\frac{m}{n}}} = 1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^Vx^5 + A^{VI}x^6 + A^{VII}x^7 + \ldots$

folglich $\frac{1}{(1+x)^m} = (1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^Vx^5 + A^{VI}x^6 + A^{VII}x^7 + \ldots)^n$

und $\frac{1}{(1+x')^m} = (1 + A'x' + A''x'^2 + A'''x'^3 + A^{IV}x'^4 + A^Vx'^5 + A^{VI}x'^6 + A^{VII}x'^7 + \ldots)^n$

Verrichtet man die Subtraction, dividirt jeden Rest durch $x - x'$, und sezt in jeden Quotienten $x = x'$; so erhält man

$$-\frac{m}{(1+x)^{m+1}} =$$

$$n(1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^Vx^5 + A^{VI}x^6 + \ldots)^{n-1} \times (A' + 2A''x + 3A'''x^2 + 4A^{IV}x^3 + 5A^Vx^4 + 6A^{VI}x^5 + \ldots)$$

folglich $-\frac{m}{(1+x)^{m+1}}(1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^Vx^5 + A^{VI}x^6 + \ldots)$

$$= n(A' + 2A''x + 3A'''x^2 + 4A^{IV}x^3 + 5A^Vx^4 + 6A^{VI}x^5 + \ldots)$$
$$\times (1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^Vx^5 + A^{VI}x^6 + \ldots)^n$$

$$= n(A' + 2A''x + 3A'''x^2 + 4A^{IV}x^3 + 5A^Vx^4 + 6A^{VI}x^5 + \ldots) \times \frac{1}{(1+x)^m}$$

Mithin $-\frac{m}{1+x}(1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^Vx^5 + A^{VI}x^6 + \ldots)$

$$= n(A' + 2A''x + 3A'''x^2 + 4A^{IV}x^3 + 5A^Vx^4 + 6A^{VI}x^5 + \ldots)$$

und $-m(1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^Vx^5 + A^{VI}x^6 + \ldots)$

$$= n(A' + {}^{2}A''x + {}^{3}A'''x^2 + {}^{4}A^{IV}x^3 + {}^{5}A^Vx^4 + {}^{6}A^{VI}x^5 + {}^{7}A^{VII}x^6 + \ldots)$$

folglich $A' = -\frac{m}{n}$

$$2A'' = -A'\left(\frac{m}{n}+1\right)$$

$$3A''' = -A''\left(\frac{m}{n}+2\right)$$

$$4A^{IV} = A'''\left(\frac{m}{n}+3\right)$$

$$5A^{V} = A^{IV}\left(\frac{m}{n}+4\right)$$

Daher $\frac{1}{(1+x)^{\frac{m}{n}}} = (1+x)^{-\frac{m}{n}} =$

$$1 - \frac{m}{n}x + \frac{\frac{m}{n}}{1}\cdot\frac{\frac{m}{n}+1}{2}x^2 - \frac{\frac{m}{n}}{1}\cdot\frac{\frac{m}{n}+1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}+2}{3}x^3 + \frac{\frac{m}{n}}{1}\cdots\frac{\frac{m}{n}+3}{4}x^4$$

$$- \frac{\frac{m}{n}}{1}\cdots\frac{\frac{m}{n}+4}{5}x^5 + \ldots$$

Von dem bey dem hier gegebenen Beweis des Binomialtheorems befolgten Verfahren werden in der Folge noch andere Anwendungen gemacht werden, und es ist von Nutzen, sich mit demselben vertraut zu machen.

Ich komme nun auf die Summationen einiger Reyhen als Anwendungen der Methode der unbestimmten Coefficienten.

§. 190.

Erstes Beyspiel. Man bezeichne durch sn die Summe der natürlichen Zahlen. Diese Summe verschwindet, wenn n Null ist; folglich sind alle Glieder dieser Summe von n afficirt, und diese Summe ist eine ganze Function von n.

Sey demnach $s.n = A'n + A''n^2 + A'''n^3 + A^{IV}n^4 + \ldots$

folglich auch $s.n+1 = A'(n+1) + A''(n+1)^2 + A'''(n+1)^3 + A^{IV}(n+1)^4 + \ldots$

daher $(n+1) = A' + A''(2n+1) + A'''(3n^2+3n+1) + A^{IV}(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + \ldots$

Da das erste Glied nur die erste Potenz von n enthält; so müssen die Glieder des zweyten, welche höhere Potenzen von n als die erste enthalten, auch verschwinden; folglich verschwinden die Coefficienten A''', A^{IV} . . . . ; und man hat nur

$$s.n = A'n + A''n^2, \text{ und } n+1 = A' + A''(2n+1) = 2A''n + (A' + A'')$$

Daher $2A'' = 1$ $\quad A'' = \frac{1}{2}$

$A' + A'' = 1$ $\quad A' = \frac{1}{2}$

$$s.n = \tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{1.2}$$

Zweytes Beyspiel. Man bezeichne durch $s.n$ die Summe der Quadrate der n ersten natürlichen Zahlen; man findet wie im vorhergehenden Beyspiel, daß diese Summe eine ganze Function von der Form . . . $A'n + A''n^2 + A'''n^3$ ist.

Sey demnach $s.n^2 = A'n + A''n^2 + A'''n^3$

so hat man auch $s.(n+1)^2 = A'(n+1) + A''(n+1)^2 + A'''(n+1)^3$

$$\left.\begin{array}{l}\text{daher } (n+1)^2 \\ n^2 + 2n + 1\end{array}\right\} = A' + A''(2n+1) + A'''(3nn + 3n + 1)$$

Man erhält hieraus die drey Gleichungen

$$3A''' = 1$$
$$3A''' + 2A'' = 2$$
$$A''' + A'' + A' = 1$$

Und hieraus

$$A''' = \tfrac{1}{3}$$
$$A'' = \tfrac{1}{2}$$
$$A' = \tfrac{1}{6}$$

folglich $s.n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{6}n$

$$= \frac{n(2nn+3n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

Anmerkung. Man kann zu dieser Formel durch ein dem in §. 135. gebrauchten ähnliches Verfahren auf folgende Art gelangen, indem man die Quadratzahlen in die ungeraden Zahlen zerlegt, deren Summen sie sind.

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 1+3$$
$$3^2 = 1+3+5$$
$$4^2 = 1+3+5+7$$
$$5^2 = 1+3+5+7+9$$
$$\vdots$$
$$n^2 = 1+3+5+7+9+\ldots+(2n-1)$$

$$s.n^2 = 1(n)+3(n-1)+5(n-2)+7(n-3)+9(n-4)+\ldots$$
$$+(2n-1)(n-(n-1))$$
$$= n(1+3+5+7+9+\ldots+(2n-1))$$
$$-(1.3+2.5+3.7+4.9+\ldots+(n-1)(2n-1))$$
$$= n\times nn - 2(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(n-1)^2)$$
$$-(1+2+3+4+\ldots+n-1)$$
$$= n^3 - 2(s.n^2 - n^2) - \frac{n(n-1)}{1.2}$$

$$3s.n^2 = n^3 + 2n^2 - \frac{n(n-1)}{1.2}$$
$$= n^3 + \frac{3nn+n}{2}$$
$$= n\times\frac{2nn+3n+1}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$s.n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

Drittes Beyspiel. Sey $s.n^3 = A'n + A''n^2 + A'''n^3 + A^{IV}n^4$

$$s.(n+1)^3 = A'(n+1) + A''(n+1)^2 + A'''(n+1)^3 + A^{IV}(n+1)^4$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3nn + 3n + 1$$

$$= A' + A''(2n+1) + A'''(3nn+3n+1) + A^4(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1)$$

Man erhält hieraus folgende Gleichungen, um die Coefficienten A', A'', A''', A^{IV} zu bestimmen.

$$4A^{IV} = 1$$
$$6A^{IV} + 3A''' = 3$$
$$4A^{IV} + 3A''' + 2A'' = 3$$
$$A^{IV} + A''' + A'' + A' = 1$$

daher
$$A^{IV} = \frac{1}{4}$$
$$A''' = \frac{1}{2}$$
$$A'' = \frac{1}{4}$$
$$A' = 0$$

$$s.n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left(\frac{n(n+1)}{1.2}\right)^2$$

Die Summe der Cubikzahlen ist nämlich dem Quadrat der correspondirenden Triangularzahl gleich.

Um sich von dieser Formel zu überzeugen, hat man zu beweisen, daß

$$\left(\frac{n(n+1)}{1.2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\right)^2$$

In der That ist

$$\left(\frac{n(n+1)}{1.2}\right)^2 + (n+1)^2 = (n+1)^2\left(\frac{nn}{4} + (n+1)\right)$$
$$= (n+1)^2\,\frac{nn+4n+4}{4}$$
$$= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Viertes Beyspiel.

Sey $s.n^4 = A'n + A''n^2 + A'''n^3 + A^{IV}n^4 + A^{V}n^5$

$s.(n+1)^4 = A'(n+1) + A''(n+1)^2 + A'''(n+1)^3 + A^{IV}(n+1)^4 + A^{V}(n+1)^5$

$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

$= A'$

$+ A''(2n+1)$

$+ A'''(3nn+3n+1)$

$+ A^{IV}(4n^3+6nn+4n+1)$

$+ A^{V}(5n^4+10n^3+10n^2+5n+1)$

Daher $5A^{V} = 1$

$10A^{V}+4A^{IV} = 4$

$10A^{V}+6A^{IV}+3A''' = 6$

$5A^{V}+4A^{IV}+3A'''+2A'' = 4$

$A^{V}+A^{IV}+A'''+A''+A' = 1$

Daher $A^{V} = \frac{1}{5}$

$A^{IV} = \frac{1}{2}$

$A''' = \frac{1}{3}$

$A'' = 0$

$A' = \frac{1}{30}$

$s.n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3nn+3n-1)}{2.3.5}$

Diese Beyspiele reichen hin, um den allgemeinen bey dieser Summation zu nehmenden Gang zu zeigen.

Sezt man

$s.n^m = A'n + A''n^2 + A'''n^3 + A^{IV}n^4 + \ldots\ldots + A^{M-1}n^{m-1} + A^{M}n^{m}$

$(+ A^{M+1}n^{m+1}$

so findet sich

$$A^{M+1} = \frac{1}{m+1}$$

$$A^{M} = \frac{1}{2}$$

$$A^{M-} = \frac{1}{6^m}$$

$$A^{M-II} = 0$$

u. s. w. u. s. w.

Anmerkung. Ob es gleich schwer hält, das Gesez, welches die Coefficienten der Glieder in der die Summe irgend welcher Potenzen der natürlichen Zahlen ausdrückenden Formel befolgen, unmittelbar zu bestimmen; so läßt sich doch das Gesez, nach welchem die Summe der Potenzen einer gewissen Ordnung von den Summen der Potenzen der niedrigern Ordnungen abhängt, leicht auf folgende Art bestimmen.

$1^\circ.\ n-1 = n-1$

folglich $s.(n-1) = sn-s1$; und $s.n-s.(n-1)=s.1$

Aber $s.n-s.(n-1) = n$

folglich $s.1 = n.$

$2^\circ.\ (n-1)^2 = nn-2n+1$

folglich $s.(n-1)^2 = s.nn-2s.n+s.1$

mithin $s.nn-s.(n-1)^2 = 2s.n-s.1$

Aber $s.nn-s.(n-1)^2 = nn$

folglich $2s.n-s.1 = nn$

und $2s.n = nn+s.1 = nn+n = n(n+1)$

$$s.n = \frac{n(n+1)}{1.2}$$

$3^\circ.\ (n-1)^3 = n^3-3nn+3n-1$

folglich $s.(n-1)^3 = s.n^3-3s.nn+3s.n-s.1$

$s.n^3-s.(n-1)^3 = 3s.nn-3s.n+s.1$

das ist, $n^3 = 3s.nn-3s.n+s.1$

oder $3s.n^2 = n^3+3s.n-s.1.$

$$4^{\circ}.\quad (n-1)^4 = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1$$

$$s.(n-1)^4 = s.n^4 - 4s.n^3 + 6s.n^2 - 4s.n + s.1$$

$$s.n^4 - s.(n-1)^4 = 4s.n^3 - 6s.n^2 + 4s.n - s.1$$

das ist, $n^4 = 4s.n^3 - 6s.n^2 + 4s.n - s.1$

folglich $4s.n^3 = n^4 + 4s.n^2 - 4s.n + s.1$

Allgemein:

$$(n-1)^m = n^m - \frac{m}{1}n^{m-1} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}n^{m-2} - \frac{m}{1}\cdot\cdot\frac{m-2}{3}n^{m-3}\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$\pm\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}n^2 \mp \frac{m}{1}n \pm 1$$

$$s.(n-1)^m = s.n^m - \frac{m}{1}s.n^{m-1} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}s.n^{m-2} - \frac{m}{1}\cdot\cdot\frac{m-2}{3}s.n^{m-3}\cdot\cdot\cdot$$
$$\pm\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}s.n^2 \mp \frac{m}{1}s.n \pm s.1$$

folglich $n^m (= s.n^m - s.(n-1)^m)$

$$= \frac{m}{1}s.n^{m-1} - \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}s.n^{m-2} + \frac{m}{1}\cdot\cdot\frac{m-2}{3}s.n^{m-3}\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$\mp\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}s.n^2 \pm \frac{m}{1}s.n \mp s.1$$

folglich $ms.n^{m-1} =$

$$n^m + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}s.n^{m-2} - \frac{m}{1}\cdot\cdot\frac{m-2}{3}s.n^{m-3}\cdot\cdot\cdot \pm \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}s.n^2$$
$$\pm\frac{m}{1}s.n \pm s.1$$

und $(m+1)s.n^m =$

$$n^{m+1} + \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m}{2}s.n^{m-1} - \frac{m+1}{1}\cdot\cdot\frac{m-1}{3}s.n^{m-2}\cdot\cdot\cdot \pm \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m}{2}s.n^2$$
$$\mp\frac{m+1}{2}s.n \pm s.1.$$

Vierzehentes Kapitel.

Ueber die Construktion der logarithmischen Tafeln.

Nachdem wir den Ursprung der Logarithmen und einiger ihrer Anwendungen betrachtet haben, mit Voraussezung der Tafeln als construirt, deren wir uns bedienen lernten; so will ich zeigen, wie diese Tafeln construirt werden können. Das hier zu entwickelnde Verfahren ist nicht dasselbe, welches die ersten Berechner dieser Tafeln beobachtet haben: lezteres hat eine ungleich längere Arbeit erfordert als das hier vorzutragende. Es war die hartnäckige Standhaftigkeit der ersten Berechner und ihr Eifer für die Fortschritte der Wissenschaften nöthig, wenn sie nicht durch die Langwierigkeit einer solchen Unternehmung abgeschrekt werden sollten.

Die zu erhaltende Resultate sind längst bekannt; aber der zu befolgende Gang scheint mir einfacher als jeder der mir bekannt gewordenen, die ich auch nicht für rein elementarisch ansehen kann.

Ich werde zuerst den Logarithmen einer gegebenen Zahl berechnen, und alsdenn umgekehrt die einem gegebenen Logarithmen entsprechende Zahl bestimmen lehren.

§. 191.

Da der Logarithme der Einheit Null ist; so ist der Logarithme einer von der Einheit verschiedenen Größe $1+x$ eine Function von x, welche verschwindet, wenn $x=0$. Sey demnach

$$\text{Log.}(1+x)=A'x+A''x^2+A'''x^3+A^{IV}x^4+A^{V}x^5+A^{VI}x^6+A^{VII}x^7+\ldots.$$

so hat man ebenfalls

$$\text{Log.}(1+x') = A'x' + A''x'^2 + A'''x'^3 + A^{IV}x'^4 + A^{V}x'^5 + A^{VI}x'^6 + A^{VII}x'^7 + \ldots$$

daher

$$\text{Log.}(1+x) - \text{Log.}(1+x') = A'(x-x') + A''(x^2-x'^2) + A'''(x^3-x'^3) + A^{IV}(x^4-x'^4) + A^{V}(x^5-x'^5) + A^{VI}(x^6-x'^6) + A^{VII}(x^7-x'^7) + \ldots$$

Aber

$$\text{Log.}(1+x) - \text{Log.}(1+x') = \text{Log.}\frac{1+x}{1+x'} = \text{Log.}\left(1+\frac{x-x'}{1+x'}\right)$$

$$= A'\frac{x-x'}{1+x'} + A''\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)^2 + A'''\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)^3 + A^{IV}\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)^4 + A^{V}\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)^5 + A^{VI}\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)^6 + A^{VII}\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)^7 + \ldots$$

Mithin

$$A'(x-x') + A''(x^2-x'^2) + A'''(x^3-x'^3) + A^{IV}(x^4-x'^4) + A^{V}(x^5-x'^5) + A^{VI}(x^6-x'^6) + A^{VII}(x^7-x'^7) + \ldots$$

$$= A'\frac{x-x'}{1+x'} + A''\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)^2 + A'''\left(\frac{x-x'}{x+x'}\right)^3 + A^{IV}\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)^4 + A^{V}\left(\frac{x-x'}{1+x}\right)^5 + A^{VI}\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)^6 + A^{VII}\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)^7 + \ldots$$

Man dividire jedes Glied durch den ihm gemeinschaftlichen Factor $x-x'$: man erhält

$$A' + A''(x+x') + A'''(x^2+xx'+x'^2) + A^{IV}(x^3+\ldots+x'^3) + A^{V}(x^4+\ldots+x'^4) + A^{VI}(x^5+\ldots+x'^5) + A^{VII}(x^6+\ldots+x'^6) + \ldots$$

$$= A'\frac{1}{1+x'} + A''\frac{x-x'}{(1+x')^2} + A'''\frac{(x-x')^2}{(1+x')^3} + A^{IV}\frac{(x-x')^3}{(1+x')^4} + A^{V}\frac{(x-x')^4}{(1+x)^5} + A^{VI}\frac{(x-x')^5}{(1+x')^6} + A^{VII}\frac{(x-x')^5}{(1+x')^7} + \ldots$$

Diese leztere Gleichung muß Statt haben, was immer die respectiven Werthe von x und x' seyn mögen; folglich hat sie insbesondere Statt, wenn $x=x$. Alsdenn wird aber das erste Glied

$$A' + 2A''x + 3A'''x^2 + 4A^{IV}x^3 + 5A^{V}x^4 + 6A^{V}x^5 + 7A^{V.I}x^6 + \ldots$$

und das zweyte Glied wird

$$= A' \times \frac{1}{1+x}$$

$$= A'(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \ldots)$$

folglich $A' + 2A''x + 3A'''x^2 + 4A^{iv}x^3 + 5A^{v}x^4 + 6A^{vi}x^5 + 7A^{vii}x^6 + \ldots$

$$= A' - A'x + A'x^2 - A'x^3 + A'x^4 - A'x^5 + A'x^6 + \ldots$$

Man seze vermöge der Methode der Unbestimmten (Kap. XIII.) die Coefficienten gleicher Potenzen von x einander gleich; man erhält

$$A' = A'$$
$$2A'' = -A'$$
$$3A''' = +A'$$
$$4A^{iv} = -A'$$
$$5A^{v} = +A'$$
$$6A^{vi} = -A'$$
$$7A^{vii} = +A'$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Demnach ist A' irgend eine Größe, von welcher die übrigen Coefficienten A'', A''', A^{iv}, A^{v}, A^{vi}, A^{vii} ..... abhangen. Man erhält

$$A'' = -\tfrac{1}{2}A'$$
$$A''' = +\tfrac{1}{3}A'$$
$$A^{iv} = -\tfrac{1}{4}A'$$
$$A^{v} = +\tfrac{1}{5}A'$$
$$A^{vi} = -\tfrac{1}{6}A'$$
$$A^{vii} = +\tfrac{1}{7}A'$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

folglich $\text{Log.}(1+x) = A'(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \ldots)$

§. 192.

Diese Formel ist auf die Reduction des Bruchs $\frac{1}{1+x}$ in eine Reyhe gegründet. Damit aber diese Reduction richtig sey, darf die Größe x nicht größer seyn als die Einheit; folglich ist diese Formel blos auf den Fall anwendbar, da x nicht größer als die Einheit ist. Wirklich wird die Reyhe, welcher der Log. $\frac{1}{1+x}$ gleich ist, divergent, wenn x größer ist als die Einheit; man entfernt sich vom Werthe dieses Logarithmen immer mehr, je mehr man Glieder von ihr nimmt.

Es scheint demnach, man könne durch diese Reyhe unmittelbar nur die Logarithmen der positiven Zahlen von 1 bis 2 finden; welches dieselbe von sehr geringem Gebrauche machte. Es ist demnach wichtig zu sehen, wie man dieselbe zur Berechnung der Logarithmen aller sowohl ganzen als gebrochenen Zahlen gebrauchen kann.

Man verändere das Zeichen von x; man erhält

$$\text{Log.}(1-x) = A'(-x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{7}x^7 - \ldots)$$
$$= -A'(x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots)$$

Und diese Reyhe ist ebenso wie die vorhergehende unanwendbar, wenn x kleiner als die Einheit ist; denn sie divergirt, wenn x größer als die Einheit ist, und die Reduction des Ausdruks $\frac{1}{1-x}$ in eine Reyhe ist nur richtig, wenn $x < 1$.

Man verbinde diese beyde Reyhen, indem man die Differenz der Logarithmen von $1+x$ und $1-x$ nimmt; man erhält

$$\text{Log.}\frac{1+x}{1-x} = 2A'(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 + \tfrac{1}{11}x^{11} + \ldots)$$

Ich behaupte, daß diese leztere Reyhe sich auf die Logarithmen positiver ganzer oder gebrochener Zahlen, so gros sie auch seyn mögen, anweuden lasse.

In der That sey $\frac{1+x}{1-x}=n$; folglich $1+x:1-x=n:1$

$$1:x=n+1:n-1$$

$$x=\frac{n-1}{n+1}$$

mithin wird vorhergehende Reyhe convergent.

Erstes Beyspiel. Sey $\frac{1+x}{1-x}=2$; $x=\frac{1}{3}$

$$\text{Log. } 2=2A'\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}+\ldots.\right)$$

$\frac{1}{3}=0'333\ 333\ 333+\ldots\ \frac{1}{3}\quad=0'333\ 333\ 333+$

$\frac{1}{3^3}=0'037\ 037\ 037+\ldots\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}=0'012\ 345\ 679+$

$\frac{1}{3^5}=0'004\ 115\ 226+\ldots\ \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}=0'000\ 823\ 045+$

$\frac{1}{3^7}=0'000\ 457\ 247+\ldots\ \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}=0'000\ 065\ 321+$

$\frac{1}{3^9}=0'000\ 050\ 805+\ldots\ \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}=0'000\ 005\ 645+$

$\frac{1}{3^{11}}=0'000\ 005\ 645+\ldots\ \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}=0'000\ 000\ 513+$

$\frac{1}{3^{13}}=0'000\ 000\ 627+\ldots\ \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}=0'000\ 000\ 041+$

$\frac{1}{3^{15}}=0'000\ 000\ 069+\ldots\ \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{3^{15}}=0'000\ 000\ 005\ldots$

$\frac{1}{3^{17}}=0'000\ 000\ 008\ldots.$

Daher Log. $2=2A'(0'346573\ 585\pm)$

$=A'(0'693147\ 17\ )$

§. 193.

Ob gleich die so eben erhaltene logarithmische Reyhe auf jede positive Zahl anwendbar ist; so wird sie doch so wenig convergent, wenn diese Zahl ein wenig gros ist, daß sie für die Anwendung gar nicht bequem ist. Es sey z. B. $\frac{1+x}{1-x} = 10$; $x = \frac{9}{11}$; so convergirt vorhergehende Reyhe viel zu langsam, als daß man unmittelbar durch dieselbe den Logarithmen einer so großen Zahl wie 10 füglich berechnen könnten.

Inzwischen kann man vermittelst derselben die Logarithmen ganzer Zahlen berechnen, indem man die Logarithmen der zwischen 1 und 2 liegenden gemischten Zahlen berechnet.

Beyspiel. $2 = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2}$; mithin Log. $2 =$ Log. $\frac{4}{3}$ + Log. $\frac{3}{2}$

Aber wenn $\frac{1+x}{1-x} = \frac{4}{3}$, so ist $x = \frac{1}{7}$

wenn $\frac{1+x}{1-x} = \frac{3}{2}$, so ist $x = \frac{1}{5}$

folglich Log. $2 = 2A'(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7^7} + \ldots)$

$+ 2A'(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} + \ldots)$

$\frac{1}{7} = 0'142\ 857\ 143 - \ldots$	$\frac{1}{7} = 0'142\ 857\ 143$
$\frac{1}{7^3} = 0'002\ 915\ 452 - \ldots$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7^3} = 0'000\ 971\ 817$
$\frac{1}{7^5} = 0'000\ 059\ 499 - \ldots$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7^5} = 0'000\ 011\ 900$
$\frac{1}{7^7} = 0'000\ 001\ 214 + \ldots$	$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7^7} = 0'000\ 000\ 173$
$\frac{1}{7^9} = 0'000\ 000\ 025 \ldots$	$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{7^9} = 0'000\ 000\ 003$
	Log. $\frac{4}{3} = 2A \times 0'143\ 841\ 036$

$\frac{1}{5} =$

$\frac{1}{5} = 0'200\ 000\ 000$ $\qquad$ $\frac{1}{5} = 0'200\ 000\ 000$

$\frac{1}{5^3} = 0'008\ 000\ 000$ $\qquad$ $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} = 0'002\ 666\ 667$

$\frac{1}{5^5} = 0'000\ 320\ 000$ $\qquad$ $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} = 0'000\ 064\ 000$

$\frac{1}{5^7} = 0'000\ 012\ 800$ $\qquad$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} = 0'000\ 001\ 828$

$\frac{1}{5^9} = 0'000\ 000\ 512$ $\qquad$ $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9} = 0'000\ 000\ 057$

$\frac{1}{5^{11}} = 0'000\ 000\ 020$ $\qquad$ $\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{5^{11}} = 0'000\ 000\ 002$

$\text{Log. } \frac{3}{2} = 2A' \times 0'202\ 732\ 554$

$\text{Log. } 2 = 2A' \left\{ \begin{matrix} 0'143\ 841\ 036 \\ +0'202\ 732\ 554 \end{matrix} \right\}$

$= 2A' \times 0'346\ 573\ 590$

$= A' \times 693\ 147\ 180$

Da $\text{Log. } \frac{3}{2} = 2A' \times 0'202\ 732\ 554$

und $\text{Log. } 2 = 2A' \times 0'346\ 573\ 590$

---

so ist $\text{Log. } 3 = 2A' \times 0'549\ 306\ 144$

$(= \text{Log. } 2 + \text{Log. } \frac{3}{2}) = A' \times 1'098\ 612\ 288$

§. 194.

Je näher der Bruch, vermittelst dessen man die Logarithmen seiner Glieder berechnet, der Einheit kommt; desto convergirender wird die Reyhe, welche er gibt, und desto weniger hat man mithin Glieder zu berechnen, um eine verlangte Genauigkeit zu erhalten.

Ich will zum Beyspiel die Logarithmen der drey Primzahlen 2, 3, 5 vermittelst der Brüche $\frac{16}{15}$, $\frac{25}{24}$, $\frac{81}{80}$ berechnen; indem ich $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$, und folglich $x = \frac{1}{2n+1}$ seze.

Sey Log. $\frac{1+x}{1-x} = \frac{16}{15}$; $x = \frac{1}{31}$

$\frac{1}{31} = 0'032\ 258\ 06$ $\quad$ $\frac{1}{31} = 0'032\ 258\ 06$

$\frac{1}{31^3} = 0'000\ 033\ 57$ $\quad$ $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{31^3} = 0'000\ 011\ 19$

$\frac{1}{13^5} = 0'000\ 000\ 04$ $\quad$ $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{31^5} = 0'000\ 000\ 01$

Log. $\frac{16}{15} = 2A' \times 0'032\ 269\ 26$

Sey Log. $\frac{1+x}{1-x} = \frac{25}{24}$; $x = \frac{1}{49}$

$\frac{1}{49} = 0'020\ 408\ 16$ $\quad$ $\frac{1}{49} = 0'020\ 408\ 16$

$\frac{1}{49^3} = 0'000\ 008\ 50$ $\quad$ $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{49^3} = 0'000\ 002\ 83$

Log. $\frac{25}{24} = 2A' \times 0'020\ 410\ 99$

Sey Log. $\frac{1+x}{1-x} = \frac{81}{80}$; $x = \frac{1}{161}$

$\frac{1}{101} = 0'006\ 211\ 18$ $\quad$ $\frac{1}{101} = 0'006\ 211\ 18$

$\frac{1}{161^3} = 0'000\ 000\ 24$ $\quad$ $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{161^3} = 0'000\ 000\ 08$

Log. $\frac{81}{80} = 2A' \times 0'006\ 211\ 26$

Man hat demnach folgende Gleichungen

$4\,\text{Log.}\,2 - \text{Log.}\,3 - \text{Log.}\,5 = 2A' \times 0'032\ 269\ 26$

$-3\,\text{Log.}\,2 - \text{Log.}\,3 + 2\,\text{Log.}\,5 = 2A' \times 0'020\ 410\ 99$

$-4\,\text{Log.}\,2 + 4\,\text{Log.}\,3 - \text{Log.}\,5 = 2A' \times 0'006\ 211\ 26$

daher

$5\,\text{Log.}\,2 - 3\,\text{Log.}\,3 = 2A' \times 0'084\ 949\ 51$

$8\,\text{Log.}\,2 - 5\,\text{Log.}\,3 = 2A' \times 0'026\ 058\ 00$

$\text{Log.}\,2 = 2A' \times 0'346\ 573\ 55$

$= A' \times 0'693\ 147\ 1$

$\text{Log.}\,3 = 2A' \times 0'549\ 306\ 08$

$= A' \times 1'098\ 612\ 2$

§. 195.

Vermittelst der Logarithmen der Zahlen 2, 3, 5 berechnet man die Logarithmen aller Zahlen, welche nur diese Zahlen zu Factoren haben.

Man kann ferner vermittelst dieser Logarithmen sehr schnell die Logarithmen der andern Primzahlen berechnen, indem man die Logarithmen der Brüche berechnet, deren ein Glied eine Potenz dieser Primzahlen, oder das Product dieser Potenz durch die Zahlen 2, 3, 5 oder ihre Potenzen ist, und deren anderes Glied keine andere als leztere zu Divisoren hat.

Beyspiele. $\text{Log.}\frac{64}{63} = 6\,\text{Log.}2 - 2\,\text{Log.}3 - \text{Log.}7$;

folglich $\text{Log.}7 = 6\,\text{Log.}2 - 2\,\text{Log.}3 - \text{Log.}\frac{64}{63}$.

Oder $\text{Log.}\frac{50}{49} = \text{Log.}2 + 2\,\text{Log.}5 - 2\,\text{Log.}7$;

folglich $2\,\text{Log.}7 = \text{Log.}2 + 2\,\text{Log.}5 - \text{Log.}\frac{50}{49}$

$\text{Log.}\frac{121}{120} = 2\,\text{Log.}11 - 3\,\text{Log.}2 - \text{Log.}3 - \text{Log.}5$;

folglich $2\,\text{Log.}11 = \text{Log.}\frac{121}{120} + 3\,\text{Log.}2 + \text{Log.}3 + \text{Log.}5$

$\text{Log.}\frac{65}{64} = \text{Log.}5 + \text{Log.}13 - 6\,\text{Log.}2$;

folglich $\text{Log.}13 = 6\,\text{Log.}2 - \text{Log.}5 - \text{Log.}\frac{65}{64}$

$\text{Log.}\frac{289}{288} = 2\,\text{Log.}17 - 5\,\text{Log.}2 - 2\,\text{Log.}3$;

mithin $2\,\text{Log.}17 = 5\,\text{Log.}2 + 2\,\text{Log.}3 + \text{Log.}\frac{289}{288}$

$\text{Log.}\frac{361}{360} = 2\,\text{Log.}19 - 3\,\text{Log.}2 - 2\,\text{Log.}3 - \text{Log.}5$;

mithin $2\,\text{Log.}19 = 3\,\text{Log.}2 + 2\,\text{Log.}3 + \text{Log.}5 + \text{Log.}\frac{361}{360}$.

§. 196.

Noch lassen sich bey den logarithmischen Rechnungen eine große Menge von Abkürzungen anbringen, deren Entwiklung nicht in den Plan dieser Anfangsgründe gehört. Nur noch kürzlich von folgender:

Da Log. $(1+x) =$

$$2A'\left(x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{6}x^6+\tfrac{1}{7}x^7-\ldots\right)$$

und Log. $(1-x) =$

$$A'\left(-x-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{6}x^6-\tfrac{1}{7}x^7-\ldots\right)$$

so ist Log. $(1-xx) =$

$$-2A'\left(\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{6}x^6+\tfrac{1}{8}x^8+\ldots\right)$$

$$=-A'\left(x^2+\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{1}{3}x^6+\tfrac{1}{4}x^8+\ldots\right)$$

folglich Log. $\frac{nn-1}{nn}$ $\left(=\text{Log.}\left(1-\frac{1}{nn}\right)\right.$

$$\left.=-A'\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^8}+\ldots\right)\right)$$

Mithin Log. $\frac{\sqrt{(nn-1)}}{n}$

$$=-\tfrac{1}{2}A'\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^8}+\ldots\right)$$

daher Log. $n=$ Log. $\sqrt{(nn-1)}$

$$+\tfrac{1}{2}A'\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^8}+\ldots\right)$$

Wenn nun $n=100$, so ist $\frac{1}{n^4}=\frac{1}{10^8}=0'000\,000\,01$

$$\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^4}=0'000\,000\,0025$$

Wenn man folglich die Genauigkeit nicht über die neunte Decimalziffer hinaustreibt, so kann man vorhergehende Reyhe als auf ihr erstes Glied $\frac{1}{n^2}$ reducirt ansehen, so oft n nicht kleiner als 100 ist.

Kennt man die Logarithmen der Primzahlen, die kleiner als 100 sind, so kennt man die Logarithmen ihrer Doppelten, und mithin die Logarithmen der zwischen 100 und 200 enthaltenen geraden Zahlen. Nur liegt eine Primzahl (welche immer ungerade ist) zwischen zwey geraden Zahlen mitten inne, welche ihr unmittelbar vorhergehen oder folgen. Kennt man folglich die Logarithmen der Primzah-

len, die kleiner sind als 100; so kennt man die Logarithmen der zwischen 100 und 200 enthaltenen Zahlen vermittelst des ersten Glieds der vorhergehenden Reyhe. Man nehme nämlich den Logarithmen der mittlern geometrischen Proportionalzahl zwischen den der gegebenen Zahl unmittelbar vorhergehenden und folgenden geraden Zahlen, oder die Hälfte der Summe ihrer Logarithmen, und füge zu dieser Summe das erste Glied der vorhergehenden Reyhe $\frac{1}{2}A' \times \frac{1}{n^2}$ hinzu.

Da n ungerade ist, so ist sie von der Form $2m+1$; und $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4mm+4m+1}$. Nun ist für den kleinsten Werth von n, der über 100 geht, nämlich 101, der Unterschied zwischen $\frac{1}{4mm+4m+1}$ und $\frac{1}{4mm+4m}$ bis zur achten Decimalziffer noch nicht merklich; folglich kann man ohne einen merklichen Irrthum bis zur achten Decimalziffer, für das erste Glied der vorhergehenden Reyhe nehmen $\frac{1}{8}A' \times \frac{1}{mm+m}$ $= \frac{1}{8}A'\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)$.

Folglich hat man, wenn n größer ist als 100, sehr nahe (wenigstens bis zur achten Decimalziffer)

$$\text{Log. } n = \text{Log. } \sqrt{(nn-1)} + \tfrac{1}{8}A'\left(\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{m+1}\right)$$
$$= \frac{\text{Log.}(n-1)+\text{Log.}(n+1)}{2} + \tfrac{1}{8}A'\left(\tfrac{2}{n-1} - \tfrac{2}{n+1}\right)$$
$$= \frac{\text{Log.}(n-1)+\text{Log.}(n+1)}{2} + \tfrac{1}{4}A'\left(\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n+1}\right)$$
$$= \text{Log. } \sqrt{(nn-1)} + \tfrac{1}{2}A' \times \frac{1}{nn-1}$$

Sey $n = 2238$; so erhält man $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} < 0{,}000\,000\,1$: folglich kann man, wenn n größer ist als 2238, wofern man sich mit einer bis zur siebenten Decimalziffer sich erstreckenden Genauigkeit begnügt, den Logarithmen einer Zahl als die halbe Summe der Logarithmen der ihr unmittelbar vor-

hergehenden und nachfolgenden Zahlen, oder als den Logarithmen der mittlern geometrischen Proportionalzahl zwischen denselben gleich ansehen. Folglich wenn n größer ist als 2238; so sind die Logarithmen der natürlichen (einer arithmetischen Progression folgenden) Zahlen ebenfalls nahe in einer arithmetischen Progression, so daß bis zur siebenten Decimalziffer kein merklicher Fehler Statt hat.

§. 197.

Aus der Reyhe

$$\text{Log.}\ \frac{1+x}{1-x} = 2A'\left(x+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{7}x^7+\tfrac{1}{9}x^9+\ldots\right)$$

erhält man

$$\text{Log.}\ \sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}} = A'\left(x+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{7}x^7+\tfrac{1}{9}x^9+\ldots\right)$$

Sey $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = n$; folglich $\frac{1+x}{1-x} = nn$,

$$\text{oder}\quad 1+x : 1-x = nn : 1$$

$$1 : x = nn+1 : nn-1$$

$$x = \frac{nn-1}{nn+1};$$

so ist mithin

$$\text{Log.}\ n = A'\left(\frac{nn-1}{nn+1}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{nn-1}{nn+1}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{nn-1}{nn+1}\right)^5+\tfrac{1}{7}\left(\frac{nn-1}{nn+1}\right)^7+\tfrac{1}{9}\left(\frac{nn-1}{n+1}\right)^9+\ldots\right)$$

§. 198.

Wir haben gesehen, daß der Logarithme einer gegebenen Zahl aus einem beständigen Factor A' und aus einer Reyhe zusammengesezt ist, deren Glieder von der Größe dieser Zahl abhängen. Man kann nun für diesen Factor A' verschiedene Voraussezungen machen; die einfachste ist, A' der Einheit gleich zu sezen. Die dieser Voraussezung entsprechenden Logarithmen heißt man natürliche (oder hyperbolische, aus einem Grund, der auf einer Eigenschaft der krummen Linie beruht, welche man Hyperbel nennt.)

Man erhält auf diese Art die natürlichen Logarithmen der zehen ersten natürlichen Zahlen so wie sie hier folgen:

Log.	2	=	0,693 147 181
Log.	3	=	1,098 612 289
Log.	4	=	1,386 294 361
Log.	5	=	1,609 437 912
Log.	6	=	1,791 759 469
Log.	7	=	1,945 910 149
Log.	8	=	2,079 441 542
Log.	9	=	2,197 224 577
Log.	10	=	2,302 585 093

Die verschiedenen logarithmischen Systeme hängen von der Grösse des Factors A ab, welcher der Modulus des Systems heißt. Man findet den Modulus eines Systems, indem man den Logarithmen einer gegebenen Zahl in diesem System durch den natürlichen Logarithmen dieser Zahl dividirt. So wird, da im Tabularsystem der Logarithme von 10 die Einheit ist, dagegen der natürliche Logarithme von 10 ist 2,302 585 093, der Modulus des Tabularsystems seyn

$$\frac{1}{2{,}302\ 585\ 093} = 0{,}434\ 294\ 482$$

Man bezeichne diese Zahl durch M;

$$2M = 0{,}868\ 588\ 964$$

Da die Multiplication der natürlichen Logarithmen durch den Modulus des Tabularsystems zur Construction der gewönlichen logarithmischen Tafeln eine äusserst langwierige Operation wäre; so ist es viel besser, die Tabularlogarithmen unmittelbar vermittelst des ein für allemal berechneten Modulus zu berechnen.

Beyspiele.

1°. Sey $\frac{1+x}{1-x} = \frac{16}{15}$; $x = \frac{1}{31}$

$2M \times \frac{1}{31} = 0{,}028\ 019\ 000$ $\quad 2M \times \frac{1}{31} = 0{,}028\ 019\ 000$

$2M \times \frac{1}{31^3} = 0{,}000\ 029\ 146$ $\quad 2M \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{31^3} = 0{,}000\ 009\ 715$

$2M \times \frac{1}{31^5} = 0{,}000\ 000\ 030$ $\quad 2M \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{31^1} = 0{,}000\ 000\ 006$

Log. Tab. $\frac{16}{15} = 0{,}028\ 028\ 721$

2°. Sey $\frac{1+x}{1-x} = \frac{25}{24}$; $x = \frac{1}{49}$

$2M \times \frac{1}{49} = 0{,}017\ 726\ 305$ $\quad 2M \times \frac{1}{49} = 0{,}017\ 726\ 308$

$2M \times \frac{1}{49^3} = 0{,}000\ 007\ 383$ $\quad 2M \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{49^3} = 0{,}000\ 002\ 461$

Log. Tab. $\frac{25}{24} = 0{,}017\ 728\ 766$

$\text{Log. } \frac{16}{15} = \text{Log. } \frac{32}{30} = 5\,\text{Log. } 2 - \text{Log. } 3 - 1 = 0{,}028\ 028\ 721$

$\text{Log. } \frac{25}{24} = \text{Log. } \frac{100}{96} = 5\,\text{Log. } 2 - \text{Log. } 3 + 2 = 0{,}017\ 728\ 766$

folglich $5\,\text{Log. } 2 - \text{Log. } 3 = 1{,}028\ 028\ 721$

$5\,\text{Log. } 2 + \text{Log. } 3 = 1{,}982\ 271\ 234$

$10\,\text{Log. } 2 = 3{,}010\ 299\ 955$

$2\,\text{Log. } 3 = 0{,}954\ 242\ 513$

$\text{Log. } 2 = 0{,}301\ 029\ 995 = 0{,}3010300$

$\text{Log. } 3 = 0{,}477\ 121\ 256 = 0{,}4771213$

§. 199.

Wie man die Logarithmen gegebener Zahlen bestimmt hat; so hat man auch eine Zahl durch ihre Logarithmen, oder, welches auf dasselbe hinauslauft, eine Exponentialgröße durch ihren Exponenten auszudrücken gesucht.

Es sey a^x eine Exponentialgröße mit einem veränderlichen Exponenten x. Da diese Größe der Einheit gleich ist,

wenn $x=0$; so ist sie eine Function der veränderlichen x von dieser Art:

$$a^x = 1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^{V}x^5 + A^{VI}x^6 + \ldots$$

folglich auch

$$a^{x'} = 1 + A'x' + A''x'^2 + A'''x'^3 + A^{IV}x'^4 + A^{V}x'^5 + A^{VI}x'^6 + \ldots$$

Daher $a^x - a^{x'} =$

$$A(x-x') + A''(x^2-x'^2) + A'''(x^3-x'^3) + A^{IV}(x^4-x'^4) + A^{V}(x^5-x'^5) + A^{VI}(x^6-x'^6) + \ldots$$

Es ist aber $a^x - a^{x'} = a^{x'}(a^{x-x'}-1)$

$$= a^{x'}(A'(x-x') + A''(x-x')^2 + A'''(x-x')^3 + A^{IV}(x-x')^4 + A^{V}(x-x')^5 + A^{VI}(x-x')^6 + \ldots)$$

folglich

$$A'(x-x') + A''(x^2-x'^2) + A'''(x^3-x'^3) + A^{IV}(x^4-x'^4) + A^{V}(x^5-x'^5) + A^{VI}(x^6-x'^6) + \ldots$$

$$= a^{x'}(A'(x-x') + A''(x-x')^2 + A'''(x-x')^3 + A^{IV}(x-x')^4 + A^{V}(x-x')^5 + A^{VI}(x-x')^6 + \ldots)$$

Daher denn

$$A' + A''(x+x') + A'''(x^2+xx'+x'^2) + A^{IV}(x^3 \ldots x'^3) + A^{V}(x^4 \ldots x'^4) + A^{VI}(x^5 \ldots x'^5) + \ldots$$

$$= a^{x'}(A' + A''(x-x') + A'''(x-x')^2 + A^{IV}(x-x')^3 + A^{V}(x-x')^4 + A^{VI}(x-x')^5 + \ldots)$$

Da diese Gleichung immer Statt hat, was auch die respectiven Werthe von x, x' seyn mögen, so hat sie namentlich auch Statt, wenn $x = x'$; daher man erhält

$$A' + 2A''x + 3A'''x^2 + 4A^{IV}x^3 + 5A^{V}x^4 + 6A^{VI}x^5 + \ldots$$

$$= A'(1 + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + A^{V}x^5 + \ldots)$$

Man seze die Coefficienten gleicher Potenzen von x einander gleich; so erhält man

$$A' = A'$$
$$2A'' = A'^2$$
$$3A''' = A'A''$$
$$4A^{IV} = A'A'''$$
$$5A^{V} = A'A^{IV}$$
$$6A^{VI} = A'A^{V}$$

. . . . . .

Folglich ist A' eine unbestimmte Größe

$$A'' = \frac{1}{1.2} A'^2$$
$$A''' = \frac{1}{1.2.3} A'^3$$
$$A^{IV} = \frac{1}{1.2.3.4} A'^4$$
$$A^{V} = \frac{1}{1 \ldots 5} A'^5$$
$$A^{VI} = \frac{1}{1 \ldots 6} A'^6$$

. . . . . .

Daher $a^x = 1 + A'x + \frac{1}{1.2} A'^2x^2 + \frac{1}{1.2.3} A'^3x^3 + \frac{1}{1 \ldots 4} A'^4x^4$
$+ \frac{1}{1 \ldots 5} A'^5x^5 + \frac{1}{1 \ldots 6} A'^6x^6 + \ldots$

Eine Exponentialgröße läßt sich demnach durch ihren Exponenten und eine unbestimmte Größe A' ausdrücken, von welcher das logarithmische System abhängt. Die einfachste Vorausſezung, welche man für diese Größe A' machen kann, ist, dieſelbe zur Einheit zu machen; man erhält alsdenn wie vorhin das natürliche System; und man hat in dieſem System

$$a^x = 1 + x + \frac{1}{1.2} x^2 + \frac{1}{1.2.3} x^3 + \frac{1}{1 \ldots 4} x^4 + \frac{1}{1 \ldots 5} x^5 + \frac{1}{1 \ldots 6} x^6$$
$+ \ldots$

Die Größe a, als deren Potenzen man die Exponentialgrößen a^n ansieht, wird die Basis des logarithmischen Systems genannt; ihr Ausdruk ist

$$a = 1 + A' + \frac{1}{1.2} A'^2 + \frac{1}{1.2.3} A'^3 + \frac{1}{1...4} A'^4 + \frac{1}{1...5} A'^5 + ...$$

Sey $A' = 1$; so ist

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1...4} + \frac{1}{1...5} + \frac{1}{1...6} + ...$$

Diese Basis des Systems der natürlichen Logarithmen kommt oft sowohl in der reinen als angewandten Mathematik vor; man ist übereingekommen sie durch e zu bezeichnen. Ich will sie hier bis auf die neunte Decimalziffer berechnen.

$\frac{1}{1.2} = 0,5$

$\frac{1}{1...3} = 0,166\ 666\ 667 -$ ..

$\frac{1}{1...4} = 0,041\ 666\ 667 -$ ..

$\frac{1}{1...5} = 0,008\ 333\ 333 +$ ..

$\frac{1}{1...6} = 0,001\ 388\ 889 -$ ..

$\frac{1}{1...7} = 0,000\ 198\ 412 +$ ..

$\frac{1}{1...8} = 0,000\ 024\ 801 +$ ..

$\frac{1}{1...9} = 0,000\ 002\ 756 -$ ..

$\frac{1}{1...10} = 0,000\ 000\ 276 -$ ..

$\frac{1}{1...11} = 0,000\ 000\ 025 +$ ..

$\frac{1}{1...12} = 0,000\ 000\ 002 +$ ..

$e = 2,718\ 281\ 828 \pm$

Nun ist noch für jedes logarithmische System der Werth von A' zu bestimmen übrig. Hiezu bezeichne man den natürlichen Logarithmen von a durch Log. a.

Da $a^x = 1 + A'x + \frac{1}{1.2}A'^2x^2 + \frac{1}{1.2.3}A'^3x^3 + \frac{1}{1...4}A'^4x^4 + \frac{1}{1...5}A'^5x^5 + \frac{1}{1...6}A'^6x^6 + \ldots$

und $e^z = 1 + z + \frac{1}{1.2}z^2 + \frac{1}{1.2.3}z^3 + \frac{1}{1...4}z^4 + \frac{1}{1...5}z^5 + \frac{1}{1...6}z^6 + \ldots$

so hat man; $e^z = a^x$, und folglich $z = x$ Log. a gesezt,

$e^z = 1 + x\,\text{Log. a} + \frac{1}{1.2}x^2\,\overline{\text{Log. a}}^2 + \frac{1}{1.2.3}x^3\,\overline{\text{Log. a}}^3 + \frac{1}{1...4}x^4\,\overline{\text{Log. a}}^4 + \frac{1}{1...5}x^5\,\overline{\text{Log. a}}^5 + \frac{1}{1...6}x^6\,\overline{\text{Log. a}}^6 + \ldots$

$= 1 + A'x + \frac{1}{1.2}A'^2x^2 + \frac{1}{1.2.3}A'^3x^3 + \frac{1}{1...4}A'^4x^4 + \frac{1}{1...5}A'^5x^5 + \frac{1}{1...6}A'^6x^6 + \ldots$

mithin $A' = \text{Log. a}$.

Eine Exponentialgröße a^x wird nämlich durch ihren Exponenten x, und durch den natürlichen Logarithmen der Basis a vermittelst der Reyhe

$a^x = 1 + x\,\text{Log. a} + \frac{1}{1.2}x^2\,\overline{\text{Log. a}}^2 + \frac{1}{1.2.3}x^3\,\overline{\text{Log. a}}^3 + \frac{1}{1...4}x^4\,\overline{\text{Log. a}}^4 + \frac{1}{1...5}x^5\,\overline{\text{Log. a}}^5 + \frac{1}{1...6}x^6\,\overline{\text{Log. a}}^6 + \ldots$

ausgedrükt.

Zusaz zum vierzehenten Kapitel über die Logarithmen negativer und imaginärer Größen.

§. 200.

In der Formel des §. 192.

$$\text{Log.}\frac{1+x}{1-x} = 2A\left(x+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{7}x^7+\tfrac{1}{9}x^9+\tfrac{1}{11}x^{11}+\ldots\right)$$

seze man $z\sqrt{-1}$ statt x; so erhält man

$$\text{Log.}\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} =$$

$$2A\sqrt{-1}\left(z-\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{5}z^5-\tfrac{1}{7}z^7+\tfrac{1}{9}z^9-\tfrac{1}{11}z^{11}+\tfrac{1}{13}z^{13}-\ldots\right)$$

Insbesondere sey nun $z=1$; so wird

$$\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} = \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \frac{(1+\sqrt{-1})^2}{(1+\sqrt{-1})(1-\sqrt{-1})} = \sqrt{-1}$$

daher

$$\text{Log.}\sqrt{-1} = 2A\sqrt{-1}\left(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{13}-\tfrac{1}{15}+\ldots\right)$$

Aber $(\sqrt{-1})^2 = -1$; folglich $\text{Log.}-1 = 2\,\text{Log.}\sqrt{-1}$; also

$$\text{Log.}-1 = 4A\sqrt{-1}\left(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{13}-\tfrac{1}{15}+\ldots\right)$$

Folglich ist der Logarithme der negativen Größe -1 eine imaginäre oder unmögliche Größe, und die Unmöglichkeit dieses Logarithmen hängt blos von der unmöglichen Größe $\sqrt{-1}$ ab.

Allgemein.

$$\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} = \frac{(1+z\sqrt{-1})^2}{(1+z\sqrt{-1})(1-z\sqrt{-1})} = \frac{1-zz+2z\sqrt{-1}}{1+zz}$$

$$= \frac{1-zz}{1+zz} + \frac{2z\sqrt{-1}}{1+zz}$$

$$= \frac{1-zz}{1+zz}\times\left(1+\frac{2z\sqrt{-1}}{1-zz}\right)$$

Folglich $\text{Log.}\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} = \text{Log.}\frac{1-zz}{1+zz} + \text{Log.}\left(1+\frac{2z}{1-zz}\sqrt{-1}\right)$

mithin $\text{Log.}\left(1+\frac{2z}{1-zz}\sqrt{-1}\right) =$

$$2A\sqrt{-1}\left(z-\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{5}z^5-\tfrac{1}{7}z^7+\tfrac{1}{9}z^9-\tfrac{1}{11}z^{11}+\ldots\right)$$
$$+\text{Log.}\frac{1+zz}{1-zz}$$

Es sey irgend eine imaginäre Größe $a+b\sqrt{-1}$ gegeben, deren Logarithmen man auszudrücken verlangt.

Es ist $a+b\sqrt{-1} = a\left(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)$

Man mache $\frac{2z}{1-zz} = \frac{b}{a}$; man erhält $z = \frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{b}$

$$1+zz = \frac{2\sqrt{(aa+bb)}}{b} \times \frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{b}$$

$$1-zz = \frac{2a(\sqrt{(aa+bb)}-a)}{bb}$$

$$\frac{1+zz}{1-zz} = \frac{\sqrt{(aa+bb)}}{a}$$

Folglich ist $\text{Log.}(a+b\sqrt{-1}) = \text{Log.}\sqrt{(aa+bb)}$

$$+2A\sqrt{-1}\left(\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{b}\right.$$
$$-\tfrac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{b}\right)^3$$
$$+\tfrac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{b}\right)^5$$
$$-\tfrac{1}{7}\left(\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{b}\right)^7$$
$$+\tfrac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{b}\right)^9$$
$$-\tfrac{1}{11}\left(\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{b}\right)^{11}$$
$$\left.+\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\right)$$

Nun läßt sich aber (§. 174.) jede imaginäre Größe auf die Form $a+b\sqrt{-1}$ zurückführen; folglich ist der Loga-

rithme jeder imaginären Größe selbst eine imaginäre Größe, und die Unmöglichkeit dieses Logarithmen ist auf die Unmöglichkeit des Ausdruks $\sqrt{-1}$ zurükgeführt.

Anmerkung. Man beweist, daß die Reyhe

$$z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7}z^7 + \tfrac{1}{9}z^9 - \ldots$$

einen Cirkelbogen ausdrükt, dessen Halbmesser die Einheit, und dessen Tangente z ist; folglich hängt der Logarithme einer imaginären Größe von der imaginären Größe $\sqrt{-1}$, und von der Rectification des Kreises ab.

Zweyte Anmerkung. Man könnte versucht werden zu untersuchen, ob sich der Werth von Log. -1 nicht unmittelbar aus Log. $\frac{1+x}{1-x}$ ableiten liesse, indem man für x einen reellen Werth substituirte.

Sey demnach allgemein $\frac{1+x}{1-x} = -n$,

folglich $1+x : 1-x = -n : 1$

$1 : x = -n+1 : -n-1$

also $x = \frac{n+1}{1-n}$

Da aber der Zähler dieses Bruchs größer ist, als der Nenner, so wird die Reyhe

$$x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 + \ldots$$

divergirend von ihrem Anfang an oder nach einer gewissen Anzahl von Gliedern; und folglich kann man nichts für ihren Werth schliessen.

Wenn $n = 1$; so erhält man $x = \frac{2}{0}$; das heißt: es gibt keinen Werth von x, welcher $\frac{1+x}{1-x} = -1$ machte.

§. 201.

Nachdem wir die Unmöglichkeit der Logarithmen negativer Größen vermittelst der Formeln der Logarithmen nega-

tiver Größen gezeigt haben; so will ich noch ein Wort über diese Unmöglichkeit beyfügen, so fern sie aus der Natur der Logarithmen selbst und der negativ genannten Größen geschlossen werden kann.

Ich behaupte zuvörderst, daß man nicht sagen kann, daß zwischen einer positiven und negativen Größe ein Verhältnis Statt finde.

Es können nämlich nach Euklid (El. V. Buch, 4te Def.) zwey Größen ein Verhältnis zu einander haben, wenn die eine wiederholt oder eine gewisse Anzahl mal zu sich selbst hinzugefügt die andere übertreffen kann. Wievielmal man aber auch eine negative Größe wiederholen mag, so kann dieselbe niemals eine positive Größe hervorbringen, noch übertreffen; folglich kann man kein Verhältnis zwischen positiven und negativen Größen annehmen.

Erklärt man das Verhältnis als die Vergleichung zweyer Größen in der Absicht zu untersuchen, wie oft eine die andere enthält; so erhält man als Exponenten des Verhältnisses eine abstracte Zahl, welche immer positiv ist: folglich findet auch dieser Erklärung zufolge kein Verhältnis zwischen einer positiven und negativen Größe Statt.

Die Logarithmen aber sind Exponenten der Verhältnisse. Folglich gibt es keine Logarithmen negativer Größen; oder, was auf das nämliche hinauslauft, diese Logarithmen sind unmöglich.

Alle Operationen der Arithmetik reduciren sich auf Addition und Subtraction. Die Mathematiker haben der Einfachheit und Allgemeinheit ihrer Rechnungen wegen für gut gefunden, die Zeichen dieser Operationen mit den Größen, mit welchen sie dieselbe vornehmen, zu verbinden, so daß sie die Größen, denen das eine oder das andere dieser beyden Zeichen vorgesezt ist, als Größen zweyer verschiedenen Klassen anzusehen scheinen. Diese für die Rechnungen sehr bequeme Gewohnheit kann aber die Natur der Zahlen, welche einzig ist, nicht verändern.

Ich behaupte demnach, daß die Eintheilung der Zahlen in positive und negative blos willkührlich und zur Erleichterung der mathematischen Operationen eingeführt ist. Und ob es gleich nothwendig ist, sich in der Praxis nach derselben zu richten; so darf man sich doch in der Theorie durch die Schwürigkeiten nicht aufhalten lassen, zu welchen dieselbe Gelegenheit gibt.

Fünfzehentes Kapitel.

Ueber die Summationen geometrischer Progressionen und verschiedener davon abhängender Reyhen.

Die Summation der geometrischen Progressionen und mehrerer davon abhängender Reyhen findet sowohl in der reinen als in der angewandten Mathematik so viele Anwendungen, daß sie wohl unsere besondere Aufmerksamkeit verdient.

Erster Theil.

Ueber die Summationen geometrischer Progressionen.

§. 202.

Es sey eine geometrische Progression, die mit der Einheit anfängt, und deren zweytes Glied p ist. Es sey s die Summe von n Gliedern dieser Progression, so daß man habe

$$s = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + \ldots\ldots + p^{n-2} + p^{n-1}.$$

Man multiplicire jedes Glied mit p; so erhält man

$$sp = p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + \ldots\ldots + p^{n-2} + p^{n-1} + p^n$$

Erster Fall. Es sey $p > 1$. Man ziehe die Glieder der ersten Gleichung von den Gliedern der zweyten ab; so erhält man

$$sp - s = -1 + p^n$$

$$\text{oder } s(p-1) = p^n - 1;\ s = \frac{p^n - 1}{p-1} = \frac{p^n}{p-1} - \frac{1}{p-1}$$

Zweyter Fall. Es sey $p < 1$. Man ziehe die Glieder der zweyten Gleichung von den Gliedern der ersten ab; so erhält man

$$s - sp = 1 - p^n$$

$$\text{oder } s(1-p) = 1 - p^n;\ s = \frac{1-p^n}{1-p} = \frac{1}{1-p} - \frac{p^n}{1-p}$$

Erste Anmerkung. Wenn $p > 1$; so wird die Grösse p^n, und folglich auch die Grösse $\frac{p^n}{p-1}$ um so grösser, je grösser n oder die Zahl der Glieder ist, welche man nimmt, und die Summe der Progression hat keine Grenze ihrer Grösse. Und da die Einheit desto kleiner im Verhältnis gegen p^n wird, je grösser leztere Grösse ist; so nähert sich der Ausdruk der Summe der Progression, deren Anzahl der Glieder n ist, dem Ausdruk $\frac{p^n}{p-1}$ um so mehr, je grösser man die Anzahl der Glieder nimmt: oder das Verhältnis dieser Summe zum lezten Glied kommt dem Verhältnis von p zu $p-1$ um so näher, je mehr man Glieder der Progression nimmt.

Zweyte Anmerkung. Wenn $p < 1$; so wird die Grösse p^n, und mithin auch die Grösse $\frac{p^n}{p-1}$ um so kleiner, je grösser n ist, so daß leztere Grösse keine Grenze ihrer Abnahme hat. Die Summe der Glieder der Progression nähert sich demnach der beständigen Grösse $\frac{1}{1-p}$ um so mehr,

je mehr man Glieder nimmt; so daß für den Unterschied zwischen der Summe der Glieder der Progression und der Größe $\frac{1}{1-p}$ keine Grenze Statt hat. Die Größe $\frac{1}{1-p}$ heißt alsdenn die Grenze der Summe der Progression; die Summe der Glieder der Progression nähert sich nämlich dieser Größe um so mehr, je größer man die Anzahl jener Glieder nimmt, und sie kann von ihr um weniger als um irgend eine gegebene Größe unterschieden gemacht werden. Der Abkürzung wegen, wiewohl uneigentlich, nennt man oft die Größe $\frac{1}{1-p}$ die Summe der Progression.

Beyspiele.

1°. Sey $p=\frac{1}{2}$; Gränze $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots\right)$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

2°. Sey $p=\frac{1}{3}$; Gränze $\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\ldots\right)$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

3°. Sey $p=\frac{2}{3}$; Gränze $\left(1+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^3}{3^3}+\frac{2^4}{3^4}+\frac{2^5}{3^5}+\ldots\right)$

$$= \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

4°. Sey $p=\frac{3}{4}$; Gränze $\left(1+\frac{3}{4}+\frac{3^2}{4^2}+\frac{3^3}{4^3}+\frac{3^4}{4^4}+\frac{3^5}{4^5}+\ldots\right)$

$$= \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

5°. Sey $p=\frac{3}{5}$; Gränze $\left(1+\frac{3}{5}+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^3}{5^3}+\frac{3^4}{5^4}+\frac{3^5}{5^5}+\ldots\right)$

$$= \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = 2\frac{1}{2}$$

Dritter Fall. Man seze $p = 1$. Aus der einen oder der andern der Gleichungen

$$s(p-1) = p^n - 1 \text{ (im ersten Fall)}$$

$$s(1-p) = 1 - p^n \text{ (im zweyten Fall)}$$

welche sich auf $s(1-1) = 1-1$, oder $s \times 0 = 0$ zu reduciren scheinen, erhellt, daß man für den Werth von s nichts schliessen kann. Da aber alle Glieder der Progression der Einheit gleich sind; so ist ihre Summe der Einheit sovielmal genommen gleich, als man Glieder hat, nämlich n. Ich will zeigen, wie man diesen Werth von s für den dritten Fall vermittelst der Formeln für einen oder den andern der beyden ersten Fälle, zum Beyspiel vermittelst der Formel für den zweyten Fall, da $p < 1$, erhalten kann.

Man seze zu diesem Endzwek in der Formel

$$s = \frac{1}{1-p} - \frac{p^n}{1-p},$$

$1-p = z$, oder $p = 1-z$; und substituire diesen Werth von p; so erhält man

$$s = \frac{1}{z} - \frac{(1-z)^n}{z}$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1 - \frac{n}{1}z + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}z^2 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-2}{3}z^3 + \frac{n}{1}\cdots}{z}$$

$$\left(\cdots + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{\frac{n}{1}z - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}z^2 + \frac{n}{1}\cdots\frac{n-2}{3}z^3 - \frac{n}{1}\cdots\frac{n-3}{4}z^4 + \frac{n}{1}\cdots - \frac{n-4}{5}z^5 - \cdots}{z}$$

$$\left(= \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \cdots}{z}\right)$$

$$= \frac{n}{1} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}z + \frac{n}{1}\cdots\frac{n-2}{3}z^2 - \frac{n}{1}\cdots\frac{n-3}{4}z^3 + \frac{n}{1}\cdots - \frac{n-4}{5}z^4 - \cdots$$

$$\left(\cdots + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \cdots\right)$$

Demnach haben Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{1-p^n}{1-p}$, welcher den Werth von s ausdrükt, immer einen gemein-

schaftlichen Theiler, nämlich z oder 1-p: und der durch Divisionen des Zählers mit dem Nenner sich ergebende Werth ist der von diesem gemeinschaftlichen Theiler befreyte Werth des Bruchs; nämlich

$$\frac{n}{1} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(1-p) + \frac{n}{1}\cdots\frac{n-2}{3}(1-p)^2 - \frac{n}{1}\cdots\frac{n-3}{4}(1-p)^3$$
$$+ \frac{n}{1}\cdots\frac{n-4}{5}(1-p)^4 - \frac{n}{1}\cdots\frac{n-5}{6}(1-p)^5 + \cdots$$

In dem besondern Fall, da $p = 1$, wird $1-p = 0$; der gemeinschaftliche Theiler des Nenners und Zählers (welcher zufolge eines nicht auf diesen Fall anwendbaren, zu Untersuchung der Summe s gebrauchten Verfahrens hereingekommen war) zeigt sich allein; und der Werth der vorgelegten Summe reducirt sich auf das erste Glied des vorhergehenden Ausdruks, nämlich n; wie dis seyn muß.

§. 203.

Aus der Gleichung

$$s = \frac{1}{1-p} - \frac{p^n}{1-p},$$

welche s durch p und n bestimmt, kann man die Größen p und n durch einander zu bestimmen suchen.

Die Gleichung, durch welche p in s und n bestimmt wird, ist von der Beschaffenheit, daß ihre Auflösung die Elemente überschreitet; und man hat nicht einmal ein direktes Mittel zu derselben zu gelangen.

Da $s = \frac{1-p^n}{1-p}$, so ist $p^n = 1 - s(1-p)$

$$n \operatorname{Log.} p = \operatorname{Log.} (1 - s(1-p))$$

$$n = \frac{\operatorname{Log.}(1-s(1-p))}{\operatorname{Log.} p}$$

Erste Anmerkung. Sey $p > 1$; so erhält man

$$n = \frac{\operatorname{Log.}(1+s(p-1))}{\operatorname{Log.} p}$$

Zweyte Anmerkung. Sezt man $p < 1$; so ist die Gränze der Größe von s..... $\frac{1}{1-p}$ (vorherg. §.); folglich wenn $s > \frac{1}{1-p}$ gegeben ist, so ist n die Anzahl der Glieder unmöglich, mithin auch die Formel $\frac{\text{Log. } (1-s(1-p))}{\text{Log. } p}$ unmöglich. Diese Unmöglichkeit kommt aber nicht vom Nenner Log. p her, welcher reell ist; folglich rührt sie vom Zähler Log. $(1-s(1-p))$ her; mithin ist, wenn $s > \frac{1}{1-p}$ gesezt wird, Log. $(1-s(1-p))$ unmöglich, das ist, der Logarithme der negativen Größe $1-s(1-p)$ ist unmöglich; nun kann aber $1-s(1-p)$ jede negative Größe vorstellen; folglich ist der Logarithme einer negativen Größe unmöglich. (den §§. 183. 200. gemäß.)

Dritte Anmerkung. Die Formel $n = \frac{\text{Log. } (1-s(1-p))}{\text{Log. } p}$ läßt sich, wie mich dünkt, nicht unmittelbar auf den Fall, da $p = 1$, und folglich $1-p = 0$, anwenden. Um den diesem Fall entsprechenden Werth von n zu erhalten, reducire man den Zähler und Nenner in Reyhen; nämlich

$$\text{Log. } (1-s(1-p)) = -(s(1-p) + \tfrac{1}{2}s^2(1-p)^2 + \tfrac{1}{3}s^3(1-p)^3 + \tfrac{1}{4}s^4(1-p)^4 + \ldots.)$$

$$\text{Log. } p = \text{Log. } (1-(1-p)) = -((1-p) + \tfrac{1}{2}(1-p)^2 + \tfrac{1}{3}(1-p)^3 + \tfrac{1}{4}(1-p)^4 + \ldots.)$$

folglich

$$n = \frac{s(1-p) + \frac{1}{2}s^2(1-p)^2 + \frac{1}{3}s^3(1-p)^3 + \frac{1}{4}s^4(1-p)^4 + \ldots.}{1-p + \frac{1}{2}(1-p)^2 + \frac{1}{3}(1-p)^3 + \frac{1}{4}(1-p)^4 + \ldots.}$$

$$= \frac{s + \frac{1}{2}s^2(1-p) + \frac{1}{3}s^3(1-p)^2 + \frac{1}{4}s^4(1-p)^3 + \ldots.}{1 + \frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{3}(1-p)^2 + \frac{1}{4}(1-p)^3 + \ldots.}$$

Demnach haben die beyden Glieder des Bruchs, welcher den Werth von n ausdrükt, in allen Fällen einen (wahren oder scheinbaren) gemeinschaftlichen Theiler $1-p$; und wenn $1 = p$ ist, so geben die Glieder des Bruchs, welcher

den Werth von n ausdrükt, von diesem gemeinschaftlichen Theiler befreyt, $n=s$; wie dis seyn muß.

§. 204.

Was von den geometrischen Progressionen gesagt worden ist, welche mit der Einheit anfangen, läßt sich auf die geometrischen Progressionen anwenden, deren erstes Glied nicht die Einheit ist.

Es sey q das erste und p das zweyte Glied einer geometrtschen Progression, deren Anzahl der Glieder n und die Summe s sey. Man erhält

$$s=q+p+\frac{p^2}{q}+\frac{p^3}{q^2}+\frac{p^4}{q^3}+\frac{p^5}{q^4}+\frac{p^6}{q^5}+\ldots+\frac{p^{n-1}}{q^{n-2}})$$

$$=q\left(1+\frac{p}{q}+\frac{p^2}{q^2}+\frac{p^3}{q^3}+\frac{p^4}{q^4}+\frac{p^5}{q^5}+\frac{p^6}{q^6}+\ldots+\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right)$$

daher

$$s=q\times\frac{\frac{p^n}{q^n}-1}{\frac{p}{q}-1}=\frac{p^n-q^n}{q^{n-2}(p-q)},$$ wenn die Progression wächst

$$s=q\times\frac{1-\frac{p^n}{q^n}}{1-\frac{p}{q}}=\frac{q^n-p^n}{q^{n-2}(q-p)},$$ wenn die Progression abnimmt.

Erste Anmerkung. Wenn die Progression abnimmt, so ist Gränze von $s=q\times\frac{1}{1-\frac{p}{q}}=\frac{qq}{q-p}$,

welches ich durch $s=\frac{qq}{q-p}$ bezeichnen will.

Daher 1°. $s(q-p)=qq$

$$ps=q(s-q)$$

$$p=\frac{q(s-q)}{s}=q-\frac{qq}{s}$$

$$2^{\circ}.\ qq - qs + ps = o$$
$$4qq - 4qs + 4ps = o$$
$$4qq - 4qs + ss = ss - 4ps = s(s-4p)$$
$$q = \frac{s \pm \sqrt{(s(s-4p))}}{2}$$

Gränze. Damit die Aufgabe möglich sey, muß man $s(s-4p) \geqq o$, mithin $s \geqq 4p$ haben. Demnach hat der kleinste Werth der Gränze der Summe einer abnehmenden Progression, deren zweytes Glied gegeben ist, Statt, wenn diese Summe das Vierfache des zweyten Glieds ist; und alsdenn ist $q = \frac{1}{2}s = 2p$, das heißt, das erste Glied doppelt so gros als das zweyte, und folglich jedes Glied doppelt so gros als das folgende.

In der That sey $q = 2p \pm p'$

$$\text{so ist} \quad s = \frac{qq}{q-p} = \frac{(2p \pm p')^2}{p \pm p'}$$
$$= \frac{4pp \pm 4pp' + p'p'}{p \pm p'} = 4p + \frac{p'p'}{p+p'};$$

folglich hat der kleinste Werth von s Statt, wenn $p' = o$, oder $q = 2p$.

Erste Anmerkung. Wenn $s > 4p$, so hat das erste Glied zwey Werthe; und es gibt mithin zwey geometrische Progressionen, welche einerley zweytes Glied und einerley Gränze haben.

Beyspiele. 1°. Sey $\begin{matrix} p = 2 \\ s = 9, \end{matrix}$ so ist $9 = \frac{9 \pm \sqrt{(9(9-8))}}{2}$

$$= \frac{9 \pm 3}{2} = \left\{ \begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \right\}$$

und man hat die beyden Progressionen

$$6, 2, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{9}, \tfrac{2}{27}, \tfrac{2}{81}, \ldots.$$
$$3, 2, \tfrac{4}{3}, \tfrac{8}{9}, \tfrac{16}{27}, \tfrac{32}{81}, \ldots.$$

welche einerley Gränze haben.

2°. Sey $\begin{matrix} p = 3 \\ s = 12\frac{1}{2} \end{matrix}$; so ist $s = 6\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}}$

$$= 6\tfrac{1}{4} \pm 1\tfrac{1}{4} = \begin{matrix} 7\frac{1}{2} \\ 5 \end{matrix} \Big\}$$

Die beyden Progressionen

$$7\tfrac{1}{2},\ 3,\ \tfrac{6}{5},\ \tfrac{12}{25},\ \tfrac{24}{125},\ \tfrac{48}{625},\ \ldots\ldots$$
$$5,\ 3,\ \tfrac{9}{5},\ \tfrac{27}{25},\ \tfrac{81}{125},\ \tfrac{243}{625},\ \ldots\ldots$$

haben einerley Gränze.

Zweyte Anmerkung. Es gibt so viel abnehmende geometrische Progressionen als man will, welche einerley Gränze haben. Man kann nämlich in der Gleichung $p = \frac{q(s-q)}{s}$, indem die Größe s die nämliche bleibt, q nach Belieben verändern; nimmt man nämlich q kleiner als s, so bleibt das zweyte Glied p positiv; nimmt man aber q größer als s, so besteht die Progression aus abwechslungsweise positiven und negativen Gliedern (womit wir uns in der Folge beschäftigen werden).

§. 205.

Da $s = \frac{1-p^n}{1-p} = \frac{1}{1-p} - \frac{p^n}{1-p}$; so ist $\frac{1}{1-p} = s + \frac{p^n}{1-p}$.

Entwickelt man die gebrochene Größe $\frac{1}{1-p}$ (indem man $1 > p$ sezt) in eine Reyhe; so ist der Werth dieses Bruchs von der Summe s der entwickelten Glieder, an der Zahl n, um die Größe $\frac{p^n}{1-p}$ unterschieden, welche um so kleiner wird, je größer n ist, und kleiner gemacht werden kann als jede gegebene Größe. Diese Entwiklung in eine Reyhe kann (wenn es nöthig ist) dazu dienen, das über die Gränze der Summe der Glieder einer abnehmenden geometrischen Progression gesagte zu bestätigen.

Es sey $p > 1$. Die Summe der entwickelten Glieder entfernt sich um so mehr von der vorgegebenen Größe, je

eine größere Anzahl von Gliedern man entwickelt. In diesem Fall kann mithin die Entwiklung nicht dienen, um den Werth der zu entwickelnden Größe kennen zu lernen; und damit die Entwiklung richtig sey, muß man sie mit $\frac{p^n-1}{p-1}$ vornehmen.

Es sey $p=1$. Die Gleichung $\frac{1}{1-p} = s + \frac{1}{1-p}$ kann über den Werth des (scheinbaren) zu entwickelnden Bruchs $\frac{1}{1-p}$ nicht belehren, indem sein Werth $s+\frac{1}{1-p}$ ihn selbst wieder in sich schließt. Es wäre ungereimt daraus, nach Abziehung von $\frac{1}{1-p}$ auf beyden Seiten, zu schliessen, daß die Summe der entwickelten Glieder, ihre Anzahl möge so gros seyn als man wolle, Null sey. Im Fall, da $p=1$, sind $1-p$ und $\frac{1}{1-p}$ keine Größen, und man kann Operationen, welche nur für Zeichen wirklicher Größen richtig sind, nicht auf Zeichen von Nicht-Größen anwenden.

Es sey $p > 1$; so wird der Bruch $\frac{1}{p^n-1}$, in eine Reyhe entwickelt,

$$\frac{1}{p^n} + \frac{1}{p^{2n}} + \frac{1}{p^{3n}} + \frac{1}{p^{4n}} + \frac{1}{p^{5n}} + \frac{1}{p^{6n}} + \ldots.$$

Ich will von dieser Entwiklung eine Anwendung auf die periodische Decimalbrüche machen.

Es sey $p=10$.

1°. Sey $n=1$;

$$\frac{1}{10-1} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^6} + \ldots = 0'111111\ldots$$

Mithin ist die Grenze des Decimalbruchs $0'111111\ldots$ $\frac{1}{10-1} = \frac{1}{9}$. Allgemein ist die Grenze der Reyhe

$$\frac{m}{10} + \frac{m}{10^2} + \frac{m}{10^3} + \frac{m}{10^4} + \frac{m}{10^5} + \ldots$$

$\frac{m}{9}$. Es sey z. B. m=3; so ist Grenze von o'333 333...
$= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

2°. Sey n=2;

$$\frac{1}{10^2-1} = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^8} + \frac{1}{10^{10}} + \ldots = o'oIoIoIoI\ldots$$

Mithin Grenze von $o'oIoIoIoI\ldots = \frac{1}{10^2-1} = \frac{1}{99}$.

Und allgem in: $\frac{m}{10^2} + \frac{m}{10^4} + \frac{m}{10^6} + \frac{m}{10^8} + \ldots = \frac{m}{99}$.

Man zerlege $10^2-1 = 99$ in seine Factoren, und nehme diese Factoren paarweise so, daß ihre Produkte 99 seyen; diese Paare sind

1 · 99
3 · 33
9 · 11

Daher
$o'oI\,oI\,oI\,oI\ldots = \frac{1}{99}$
$o'o3\,o3\,o3\,o3\ldots = \frac{3}{99} = \frac{1}{33}$
$o'33\,33\,33\,33\ldots = \frac{33}{99} = \frac{1}{3}$
$o'o9\,o9\,o9\,o9\ldots = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$
$o'II\,II\,II\,II\ldots = \frac{11}{99} = \frac{1}{9}$

3°. Sey n=3.

$$\frac{1}{10^3-1} = \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \frac{1}{10^{12}} + \frac{1}{10^{15}} + \ldots = o'oo1oo1oo1\ldots$$

folglich $o'oo1\,oo1\,oo1\ldots = \frac{1}{999}$;

mithin läßt sich der eigentliche Bruch $\frac{m}{999}$ in einen periodischen Decimalbruch verwandeln, dessen jede Periode drey Glieder hat.

Man zerlege namentlich die Zahl 999 in die Paare von Factoren, deren Produkt sie ist; welche sind

1 · 999
3 · 333
9 · 111
27 · 37;

man erhält

$\frac{1}{9999} = 0'0001\ 0001\ 0001 \ldots$

$\frac{3}{9999} = \frac{1}{3333} = 0'0003\ 0003\ 0003 \ldots$

$\frac{333}{9999} = \frac{1}{3} = 0'3333\ 3333\ 3333 \ldots$

$\frac{9}{9999} = \frac{1}{1111} = 0'0009\ 0009\ 0009 \ldots$

$\frac{111}{9999} = \frac{1}{9} = 0'1111\ 1111\ 1111 \ldots$

$\frac{27}{9999} = \frac{1}{37} = 0'0027\ 0027\ 0027 \ldots$

$\frac{37}{9999} = \frac{1}{27} = 0'0037\ 0037\ 0037 \ldots$

4°. Sey $n=4$.

$$\frac{1}{10^4-1} = \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^8} + \frac{1}{10^{12}} + \frac{1}{10^{16}} + \frac{1}{10^{20}} + \ldots = 0'0001\,0001\,0001 \ldots$$

und $\frac{m}{9999} = \frac{m}{10^4} + \frac{m}{10^8} + \frac{m}{10^{12}} + \frac{m}{10^{16}} + \frac{m}{10^{20}} + \ldots$

Man zerlege $9999 = 1 \times 3 \times 3 \times 11 \times 101$ in seine Factoren paarweise, nämlich

1	3	9	11	33	99
9999	3333	1111	909	303	101

Man erhält

$\frac{1}{10^4-1} = 0'0001\ 0001\ 0001 \ldots$

$\frac{3}{10^4-1} = \frac{1}{3333} = 0'0003\ 0003\ 0003 \ldots$

$\frac{3333}{10^4-1} = \frac{1}{3} = 0'3333\ 3333\ 3333 \ldots$

$\frac{9}{10^4-1} = \frac{1}{1111} = 0'0009\ 0009\ 0009 \ldots$

$\frac{1111}{10^4-1} = \frac{1}{9} = 0'1111\ 1111\ 1111 \ldots$

$\frac{11}{10^4-1} = \frac{1}{909} = 0'0011\ 0011\ 0011 \ldots$

$\frac{909}{10^4-1} = \frac{1}{11} = 0'0909\ 0909\ 0909 \ldots$

$\frac{33}{10^4-1} = \frac{1}{303} = 0'0033\ 0033\ \ldots$

$\frac{303}{10^4-1} = \frac{1}{33} = 0'0303\ 0303\ \ldots$

$\frac{99}{10^4-1} = \frac{1}{101} = 0'0099\ 0099\ \ldots$

$\frac{101}{10^4-1} = \frac{1}{99} = 0'0101\ 0101\ \ldots$

5°. Sey $n=5$.

$\frac{1}{10^5-1} = \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^{10}} + \frac{1}{10^{15}} + \frac{1}{10^{20}} + \frac{1}{10^{25}} + \ldots = 0'000010000 1\ldots$

und $\frac{m}{99999} = \frac{m}{10^5} + \frac{m}{10^{10}} + \frac{m}{10^{15}} + \frac{m}{10^{20}} + \frac{m}{10^{25}} + \ldots$

Die Factoren von 99999 sind paarweise

1	3	9	41	123	271
99999′	33333′	11111′	2439′	813′	369

Man erhält daher z. B.

$\frac{41}{10^5-1} = \frac{1}{2439} = 0'00041\ 00041\ \ldots$

$\frac{123}{10^5-1} = \frac{1}{813} = 0'00123\ 00123\ \ldots$

$\frac{271}{10^5-1} = \frac{1}{369} = 0'00271\ 00271\ \ldots$

$\frac{2439}{10^5-1} = \frac{1}{41} = 0'2439\ 2439\ \ldots$

$\frac{813}{10^5-1} = \frac{1}{123} = 0'00813\ 00813\ \ldots$

$\frac{369}{10^5-1} = \frac{1}{271} = 0'00369\ 00369\ \ldots$

6°. Sey $n=6$;

$$\frac{1}{10^6-1} = \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{12}} + \frac{1}{10^{18}} + \frac{1}{10^{24}} + \frac{1}{10^{30}} = 0'000001000001\ldots$$

und $$\frac{m}{10^6-1} = \frac{m}{10^6} + \frac{m}{10^{12}} + \frac{m}{10^{18}} + \frac{m}{10^{24}} + \frac{m}{10^{30}} + \ldots$$

Die Paare der Factoren von 999999 sind

1	3	7	9	11			
999999′	333333′	142857′	111111′	90909′			
13	21	27	33	37	39	63	
76923′	47619′	37037′	30303′	27027′	25641′	15873′	
77	91	99	111	117	143	189	231
12897′	10989′	10101′	9009′	8547′	6993′	5291′	4329′
259	273	297	333	351	407	429	481
3861′	3663′	3367′	3003′	2849′	2457′	2331′	2079′
777	819	999					
1287′	1221′	1001′					

Die Brüche, welche die Einheit zum Zähler und einen dieser Factoren zum Nenner haben, reduciren sich auf Brüche, welche 10^6-1 zum Nenner haben, und geben periodische Decimalbrüche, deren jede Periode sechs Glieder hat.

Diese Beyspiele sind hinreichend zu zeigen, daß die periodischen Decimalbrüche aus der Entwiklung gemeiner Brüche, deren Nenner von der Form 10^n-1 oder ein Factor einer Zahl von dieser Form ist, entstehen.

Wenn der Nenner eines gewöhnlichen Bruchs sich in Potenzen von 2 und 5 allein zerlegen läßt, so läßt sich derselbe in einen Decimalbruch mit endlichen Gliedern reduciren. So ist $\frac{1}{2}=0'5$; $\frac{1}{4}=0'25$; $\frac{1}{8}=0'125$; und allgemein $\frac{1}{2^m} = \frac{5^m}{10^m}$, und $\frac{1}{5^m} = \frac{2^m}{10^m}$. Desgleichen $\frac{1}{2^m \times 5^{m+n}} = \frac{1}{10^m \times 5^n} = \frac{2^n}{10^{m+n}}$; und $\frac{1}{2^{m+n} \times 5^m} = \frac{1}{10^m \times 2^n} = \frac{5^n}{10^{m+n}}$.

Wenn der Nenner eines gewöhnlichen Bruchs nicht Potenzen von zwey oder fünf allein als Factoren enthält; so gibt seine Reduction in einen Decimalbruch auch einen periodischen Decimalbruch, und die Zahl der Glieder jeder Periode ist wenigstens um eine Einheit kleiner als der Nenner des Bruchs.

Da nämlich der vorgelegte Bruch ein eigentlicher ist; so können die Reste, welche man bey einer Anzahl von successiven Divisionen, die dem Nenner des Bruchs gleich ist, erhält, (da sie alle kleiner als dieser Nenner sind) nicht alle einander ungleich seyn. Folglich erhält man bey einer solchen Anzahl von Divisionen wenigstens zwey einander gleiche Reste. Wenn aber ein Rest einem der vorhergehenden gleich ist; so folgen alle successive Reste und Quotienten von dem zweyten an einander in der nämlichen Ordnung, wie die successiven Reste und Quotienten von dem ersten an; und folglich geben diese beyden gleichen Reste Quotienten, aus denen gleiche Decimalperioden entstehen. Ferner gibt die Reduction eines eigentlichen Bruchs in einen Decimalbruch, wenn sie keinen genauen Quotienten gibt, einen Quotienten, der aus Perioden besteht, deren Anzahl der Glieder wenigstens um eine Einheit kleiner ist als der Nenner des vorgelegten Bruchs.

Zusaz. Es sey eine Zahl, die weder durch zwey noch durch fünf theilbar ist; ich behaupte, daß man immer eine Zahl von der Form $10^n - 1$ finden kann, von welcher die vorgelegte Zahl ein Theiler sey.

Beyspiel. Die vorgelegte Zahl sey 17. Ich behaupte, daß man eine Zahl von der Form $10^n - 1$ finden kann, welche durch 17 theilbar ist.

Wenn man nämlich $\frac{1}{17}$ auf einen Decimalbruch reducirt, so besteht dieser leztere aus Perioden, deren jede 16 Charaktere hat, welche sind 058 823 529 411 764 7. Diese leztere Zahl aber durch $10^{16} - 1$ dividirt, gibt einen

periodischen Decimalbruch von 16 Gliedern, welcher dieser Zahl selbst gleich ist. Folglich

$$\frac{1}{17} = \frac{588\ 235\ 294\ 117\ 647}{10^{16}-1}$$

mithin $10^{16}-1 = 17 \times 588\ 235\ 294\ 117\ 647$,

und demnach ist 17 ein Factor der Zahl $10^{16}-1$, welche von der Form $10^{n}-1$ ist, wo n um eine Einheit kleiner ist als 17.

Ebenso ist $\frac{1}{19} = \frac{52\ 631\ 578\ 947\ 368\ 421}{10^{18}-1}$

und $10^{18}-1 = 19 \times 52\ 631\ 578\ 947\ 368\ 421$.

Allgemein: der Bruch $\frac{1}{p}$ gebe einen periodischen Decimalbruch, dessen jede Periode aus n Gliedern bestehe, und die Glieder dieser Periode von der ersten bedeutenden Ziffer an machen die Zahl m aus; so hat man also $\frac{1}{p} = \frac{m}{10^{n}-1}$, und folglich $10^{n}-1 = mp$. Folglich kann man die Zahl n (kleiner als p) so bestimmen, daß die gegebene Zahl p ein Theiler der Formel $10^{n}-1$ sey.

Ist der vorgegebene Bruch $\frac{q}{p}$, dessen Zähler q kleiner ist als der Nenner, so wird jede Periode des Decimalbruchs qm seyn.

Ist der gegebene Bruch ein unächter oder größer als die Einheit; so nehme man von demselben seinen ganzen Theil weg, und wende auf den übrig bleibenden ächten Bruch an, was über jeden ächten Bruch gesagt worden ist.

§. 206.

Potenzen der nämlichen Ordnung von Gliedern einer geometrischen Progression bilden auch eine geometrische Progression; und folglich läßt sich alles, was über die Summation der einfachen geometrischen Progressionen gesagt worden

ist,

ist, auf die Summation geometrischer Progressionen anwenden, deren Glieder ähnliche Potenzen von den Gliedern der ersten sind.

Es sey die geometrische Progression $1, p, p^2, p^3, p^4, p^5 \ldots\ldots p^{n-1}$.

Erstes Beyspiel. Die geometrische Progression, deren Glieder die Quadrate von den Gliedern der ersten sind, ist $1, p^2, p^4, p^6, p^8, p^{10} \ldots p^{2n-2}$.

Die Summe dieser lezten Progression ist $\frac{1-p^{2n}}{1-p^2} = \frac{p^{2n}-1}{p^2-1}$.

Wirklich ist $p^{2n}-1 = (p^n+1)(p^n-1)$

und $p^2-1 = (p+1)(p-1)$

folglich $\frac{p^{2n}-1}{p^2-1} = \frac{p^n+1}{p+1} \times \frac{p^n-1}{p-1} = \frac{p^n+1}{p+1}(p^{n-1}+p^{n-2}+p^{n-3}+p^{n-4} \ldots + p+1)$

$$= \frac{1+p+p^2+p^3+\ldots+p^{n-1}+p^n+p^{n+1}+\ldots+p^{2n-2}+p^{2n-1}}{1+p}$$

$$= \frac{1+p}{1+p}(1+p^2+p^4+p^6+\ldots\ldots+p^{2n-2})$$

$$= 1+p^2+p^4+p^6+\ldots\ldots+p^{2n-2}.$$

Zweytes Beyspiel. Die geometrische Progression, deren Glieder die Würfel der Glieder der ersten sind, ist

$$1, p^3, p^6, p^9, p^{12} \ldots\ldots p^{3n-3};$$

und die Summe dieser leztern Progression ist $\frac{1-p^{3n}}{1-p^3} = \frac{p^{3n}-1}{p^3-1}$

Wirklich ist $\frac{p^{3n}-1}{p^3-1} = \frac{(p^n-1)(p^{2n}+p^n+1)}{(p-1)(p^2+p+1)}$

$$= \frac{p^{2n}+p^n+1}{p^2+p+1} \times \frac{p^n-1}{p-1}$$

$$= \frac{p^{2n}+p^n+1}{p^2+p+1}(p^{n-1}+p^{n-2}+p^{n-3}+p^{n-4}\ldots+p^3+p+1)$$

$$= \frac{p^{3n-1}+p^{3n-2}+p^{3n-3}+\ldots+p^{2n+1}+p^{2n}+p^{2n-1}+\ldots+p^{n+1}+p^n+p^{n-1}}{p^2+p+1}$$

$$= \frac{p^2+p+1}{p^2+p+1}(p^{3n-3}+p^{3n-6}+p^{3n-9}+\ldots+p^6+p^3+1)$$

$$= 1+p^3+p^6+p^9+\ldots+p^{3n-3}$$

Drittes Beyspiel. Die geometrische Progression, deren Glieder die vierten Potenzen der Glieder der ersten sind, ist $1, p^4, p^8, p^{12}, p^{16} \ldots p^{4n-4}$

Die Summe dieser lezten Progression ist $\frac{1-p^{4n}}{1-p^4}$

Wirklich ist $\frac{p^{4n}-1}{p^4-1} = \frac{p^n-1}{p-1} \times \frac{p^{3n}+p^{2n}+p^n+1}{p^3+p^2+p+1}$

$$= \frac{p^{3n}+p^{2n}+p^n+1}{p^3+p^2+p+1}(p^{n-1}+p^{n-2}+p^{n-3}+\ldots+p^2+p+1)$$

$$= \frac{p^{4n-1}+p^{4n-2}+p^{4n-3}+\ldots+p^3+p^2+p+1}{p^3+p^2+p+1}$$

$$= \frac{p^3+p^2+p+1}{p^3+p^2+p+1}(p^{4n-4}+p^{4n-8}+p^{4n-12}+\ldots+p^8+p^4+1)$$

$$= p^{4n-4}+p^{4n-8}+p^{4n-12}+\ldots+p^8+p^4+1.$$

Allgemein. Die aus den mten Potenzen der Glieder der ersten bestehende Progression ist

$$1, p^m, p^{2m}, p^{3m}, p^{4m} \ldots p^{mn-m}$$

Die Summe dieser lezten Progression ist $\frac{1-p^{mn}}{1-p^m} = \frac{p^{mn}-1}{p^m-1}$

Wirklich ist $\frac{1-p^{mn}}{1-p^m} =$

$$\frac{1-p^n}{1-p} \times \frac{1+p^n+p^{2n}+p^{3n}+\ldots+p^{(m-1)n}}{1+p+p^2+p^3+\ldots+p^{m-1}}$$

$$= (1+p+p^2+p^3+\ldots+p^{n-1}) \times \frac{1+p^n+p^{2n}+p^{3n}+\ldots+p^{(m-1)n}}{1+p+p^2+p3+\ldots+p^{m-1}}$$

$$= \frac{1+p+p^2+p3+\ldots+p^{mn-2}+p^{mn-1}}{1+p+p^2+p^3+\ldots+p^{m-1}}$$

$$= \frac{(1+p+p^2+p^3+\ldots+p^{m-1})(1+p^m+p^{2m}+p^{3m}+\ldots+p^{m(n-1)})}{1+p+p^2+p^3+\ldots+p^{m-1}}$$

$$= 1+p^m+p^{2m}+p^{3m}+\ldots+p^{mn-m}.$$

§. 207.

Es sey nun statt einer geometrischen Progression eine aus den nämlichen, aber abwechslungsweise positiv und negativ genommenen Gliedern zu summiren; und es sey Σ der Werth des Unterschieds der Summen der geraden und ungeraden Glieder.

Da $\Sigma = 1-p+p^2-p^3+p^4-p^5\ldots\ldots\pm p^{n-1}$,

je nachdem n $\begin{matrix}\text{ungerade}\\\text{gerade}\end{matrix}$ ist;

so ist $p\Sigma = p-p^2+p^3-p^4+p^5-p^6\ldots\ldots\mp p^{n-1}\pm p^n$;

folglich $\Sigma(p+1) = 1 \pm p^n$

$\Sigma = \frac{1\pm p^n}{1+p}$ je nachdem n $\begin{matrix}\text{ungerade}\\\text{gerade}\end{matrix}$ ist.

Es sey p kleiner als die Einheit: die Summe der Progression ist von der Größe $\frac{1}{1+p}$ abwechslungsweise als größer und kleiner unterschieden um eine Größe $\frac{p^n}{1+p}$, welche desto kleiner wird, je größer die Anzahl der Glieder ist, und keine Gränze ihrer Abnahme hat. In diesem Fall sagt man auch, wie bey den geometrischen Progressionen (obwohl in einer etwas ausgedehnten Bedeutung), daß die Größe $\frac{1}{1+p}$ die Grenze der Summe der vorgelegten Progression sey.

Es sey p größer als die Einheit. Die Summe der Progression ist abwechslungsweise positiv und negativ, und sie ist von der Größe $\frac{1}{1+p}$ um so mehr unterschieden, je größer die Anzahl ihrer Glieder ist.

Ist endlich $p=1$; so hat die Progression $1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots$ zur Summe abwechslungsweise 1 und

Null; und sie ist von der Größe $\frac{1}{1+p} = \frac{1}{2}$ abwechslungsweise als größer und als kleiner um die nämliche Größe $\frac{1}{2}$ unterschieden. Nur in einem figürlichen Sinn (und mit Anwendung der der reinen Mathematik fremden Sprache der Probabilitätenrechnung) kann man sagen, daß der Werth dieser Progression ein halb sey. Man darf blos sagen, daß ihr Werth abwechslungsweise eins und Null sey.

Da $\Sigma = \frac{1 \pm p^n}{1+p}$; so ist $p^n = \Sigma(1+p) - 1$ } $1 - \Sigma(1+p)$ }

und $n = \left.\begin{array}{l} \frac{\text{Log.}(\Sigma(1+p)-1)}{\text{Log. p}} \\ \frac{\text{Log.}(1-\Sigma(1+p))}{\text{Log. p}} \end{array}\right\}$ je nachdem n $\begin{array}{l} \text{ungerade} \\ \text{gerade} \end{array}$ ist.

Ich gehe zur Auflösung verschiedener sich auf die Summationen geometrischer Progressionen beziehender Aufgaben über.

§. 208.

Aufgabe. Eine Person, welche die Summe s besizt, vermehrt ihr Vermögen jedes Jahr um ein mtel desselben, nachdem sie zuvor am Anfang eines jeden Jahrs eine beständige aber unbekannte Summe für ihre jährliche Ausgaben hinweggenommen hat. Was muß diese Summe seyn, damit nach Verfluß einer gegebenen Anzahl n von Jahren ihr Vermögen pmal so gros werde als es anfangs gewesen war?

Hätte diese Person nichts ausgegeben; so wäre ihr Vermögen am Ende des ersten Jahrs gewesen $\frac{m+1}{m}$ s

. . . . . zweyten . . . . $\left(\frac{m+1}{m}\right)^2$ s

. . . . . dritten . . . . $\left(\frac{m+1}{m}\right)^3$ s

. . . . . vierten . . . . $\left(\frac{m+1}{m}\right)^4$ s

. . . . . ntten . . . . . $\left(\frac{m+1}{m}\right)^n s$

Ben. Sey x die Summe, welche sie zu Anfang jedes Jahrs hinwegnimmt.

Verminderung, welche von der Hinwegnahme am Anfang des ersten Jahrs erwächst . . . $\left(\frac{m+1}{n}\right)^n x$

. . . zweyten . . . . . $\left(\frac{m+1}{n}\right)^{n-1} x$

. . . dritten . . . . . $\left(\frac{m+1}{n}\right)^{n-2} x$

. . . vierten . . . . . $\left(\frac{m+1}{n}\right)^{n-3} x$

. . . . . nten . . . . . $\frac{m+1}{n} x$

Totalverminderung . . . $x\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n + \left(\frac{m+1}{n}\right)^{n-1} + \left(\frac{m+1}{n}\right)^{n-2} + \left(\frac{m+1}{n}\right)^{n-3} + \ldots + \frac{m+1}{m}\right)$

$= x\frac{m+1}{m}\left(1 + \frac{m+1}{m} + \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 + \left(\frac{m+1}{m}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{m+1}{m}\right)^{n-1}\right)$

$= x \times \frac{m+1}{m} \times \frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - 1}{\frac{1}{m}}$

$= x(m+1)\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - 1\right)$

Vermögen zu Ende des nten Jahrs . . . $\left(\frac{m+1}{m}\right)^n s - x(m+1)\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - 1\right)$

Red. $\left(\frac{m+1}{m}\right)^n s - x(m+1)\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - 1\right) = ps.$

Red. $x(m+1)\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - 1\right) = \left(\frac{m+1}{m}\right)^n s - ps =$

$$s \times \left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - p\right)$$

Aufl. $$x = s \times \frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - p}{(m+1)\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - 1\right)} = \frac{1}{m+1} s \frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - p}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - 1}$$

Beyspiel. Sey $\frac{1}{m} = \frac{1}{4}$; $n = 10$, $p = 5$. So ist

$$x = \frac{1}{5} s \times \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{10} - 5}{\left(\frac{5}{4}\right)^{10} - 1} = s \times \frac{5^9 - 4^{10}}{5^{10} - 4^{10}}$$

$$= \frac{904549}{8717049} s = \frac{11}{106} s \text{ ungefähr.}$$

Demnach müßte diese Person, wenn sie 8717049 besässe, 904549 ausgeben, oder wenn sie 106 besässe, ungefehr 11 ausgeben.

Es sey $p = 0$, so daß ihr nach Verfluß von n Jahren nichts mehr übrig bleiben soll; so hat man

$$x = \frac{1}{m+1} s \times \frac{(m+1)^n}{(m+1)^n - m^n} = \frac{1}{m+1} s \times \frac{1}{1 - \left(\frac{m}{m+1}\right)^n}$$

Wenn diese Person zu Ende jedes Jahrs vom ersten an von ihrem Kapital hinwegnimmt; so findet man für die Summe der Verminderungen

$$x\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^{n-1} + \left(\frac{m+1}{m}\right) + \left(\frac{m+1}{m}\right)^{n-3} + \ldots + \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 + \frac{m+1}{m+1}\right)$$

$$= x \times \frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - 1}{\frac{1}{m}} = mx\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - 1\right).$$

Und aus der Gleichung $\left(\frac{m+1}{m}\right)^n s - mx\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - 1\right) = ps$

findet man $x = \frac{1}{m} s \times \frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - p.}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - 1}$

Beyspiel. Eine Person bringt ein Capital zu fünf p. C. an; sie rechnet darauf, nach sechs Jahren zu sterben und ihren Erben nichts zu hinterlassen; sie hat noch um ein Jahr lang zu leben, und will jedes Jahr eine gleiche Summe ausgeben. Wie muß sie sich dabey benehmen?

Ihr Capital muß am Anfang des sechsten oder am Ende des fünften Jahrs aus seyn. Folglich ist $p=0$; $n=5$, $\frac{m+1}{m}=\frac{105}{100}=\frac{21}{20}$; folglich $m=20$. Mithin

$$x=\frac{1}{20}s\times\frac{\left(\frac{21}{20}\right)^5}{\left(\frac{21}{20}\right)^5-1}=\frac{1}{20}s\times\frac{21^5}{21^5-20^5}$$

$$=\frac{1}{20}\times\frac{4084101}{884101}s$$

$$=\frac{4084101}{17682020}s=\frac{23}{101}s \text{ ungefehr.}$$

Es sey $ps=s'$, oder das Vermögen s' dieser Person nach Verfluß von n Jahren gegeben: so hat man die Gleichung

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^n s-\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n-1\right)(m+1)x=s'.$$

Diese Gleichung schließt die Relation von fünf Größen s, s', x, n, m in sich, so daß, wenn vier derselben gegeben sind, sich die fünfte bestimmen läßt.

Gegebene Größen ... Gesuchte

$$s, s', n, m, \quad x=\frac{1}{m+1}\left(\frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^n s-s'}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^n-1}\right)$$

$$s, n, m, x, \quad s'=\left(\frac{m+1}{m}\right)^n s-\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n-1\right)(m+1)x$$

$$s', n, m, x, \quad s=s'\left(\frac{m}{m+1}\right)^n+\left(1-\left(\frac{m}{m+1}\right)^n\right)(m+1)x$$

$$s, s', m, x, \quad n=\frac{\text{Log. } s'-(m+1)x-\text{Log. } s-(m+1)x}{\text{Log. } \frac{m+1}{n}}$$

$$s, s', n, x, \quad m$$

Die Gleichung, wodurch m in den übrigen Größen bestimmt wird, ist von einer über die Elemente hinausgehenden Schwürigkeit; und man hat bisher nicht einmal eine directe Methode für diese Gattung von Gleichungen.

Da $\left(\frac{m+1}{m}\right)^n s-\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n-1\right)(m+1)x=s'$,

so ist $\left(\frac{m+1}{m}\right)^n(s-(m+1)x)=s'-(m+1)x$

oder $\left(\frac{m+1}{m}\right)^n((m+1)x-s)=(m+1)x-s'$

folglich muß, damit die Aufgabe möglich sey, wenn $s \gtrless (m+1)x$ gegeben ist, $s' \gtrless m+1)x$ gegeben seyn. Wenn diese correspondirende Ungleichheiten nicht Statt haben, so wird die Unmöglichkeit der Aufgabe durch den Logarithmen des Quotienten zweyer Größen angezeigt, wovon nur eine negativ ist.

§. 209.

Aufgabe. Ich bin jemand eine n Jahre lang vom nächsten Jahr an zu bezahlende jährliche Rente R schuldig. Der laufende Zinsfuß beträgt $\frac{1}{m}$ des Capitals. Welche Summe habe ich jezt gleich ein für allemal zu bezahlen, um mich dieser Schuld zu entledigen?

Die gesuchte Summe sey s.

Erstes Verfahren. Die ein Jahr nach dem andern geschehenden Zahlungen der Rente wachsen am Ende des nten Jahrs zu folgendem Werthe an:

Werth der am Ende des ersten Jahrs bezahlten Rente . . . $R\times\left(\frac{m+1}{m}\right)^{n-1}$

. . . . . zweyten . . . $R\times\left(\frac{m+1}{m}\right)^{n-2}$

. . . . . dritten . . . $R\times\left(\frac{m+1}{m}\right)^{n-3}$

. . . . . vierten . . . $R\times\left(\frac{m+1}{m}\right)^{n-4}$

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^n$$

. . . . . (n-1)ten . . . $R\times\left(\frac{m+1}{m}\right)$

. . . . . nten = . . . $\times R = R\times\frac{m+1}{m}\left(1+\frac{m}{m+1}+\left(\frac{m}{m+1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{m}{m+1}\right)^n\right)$

Werth aller Renten zusammen

$$R\left(1+\frac{m+1}{m}+\left(\frac{m+1}{m}\right)^2+\left(\frac{m+1}{m}\right)^3+\ldots+\left(\frac{m+1}{m}\right)^{n-1}\right)$$

$$= R\times\frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^n-1}{\frac{m+1}{m}-1} = mR\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n-1\right)$$

Werth des Capitals s am Ende des nten Jahrs . . $s\times\left(\frac{m+1}{m}\right)^n$

Diese beyden Größen müssen nun einander gleich seyn. Folglich

Bed. $s\left(\frac{m+1}{m}\right)^n = mR\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n-1\right)$

Red. u. Aufl. $s = mR\left(1-\left(\frac{m}{m+1}\right)^n\right)$

Anderes Verfahren. Die jezigen baaren Werthe der ein Jahr nach dem andern zu bezahlenden Renten sind folgende:

Baarer Werth der am Ende des ersten Jahrs zu bezahlenden Rente . . $R\times\frac{m}{m+1}$

. . . . . zweyten . . $R\times\left(\frac{m}{m+1}\right)^2$

. . . . . dritten . . $R\times\left(\frac{m}{m+1}\right)^3$

. . . . . vierten . . $R\times\left(\frac{m}{m+1}\right)^4$

. . . . . nten . . $R\times\left(\frac{m}{m+1}\right)^n$

Baarer Werth aller Renten zusammen

$$R \times \frac{m}{m+1}\left(1+\frac{m}{m+1}+\left(\frac{m}{m+1}\right)^2+\left(\frac{m}{m+1}\right)^3+\ldots+\left(\frac{m}{m+1}\right)^{n-1}\right)$$

$$= R \times \frac{m}{m-1} \times \frac{1-\left(\frac{m}{m+1}\right)^n}{1-\frac{m}{m+1}} = mR\left(1-\left(\frac{m}{m+1}\right)^n\right)$$

Der baare Werth aller Renten zusammen ist der Werth des diesen Renten gleichgeltenden Kapitals; man hat demnach $s = mR\left(1-\left(\frac{m}{m+1}\right)^n\right)$ wie durch das erste Verfahren.

Drittes Verfahren. Wäre die Rente fortdaurend, so würde sie einem Kapital gleich gelten, wovon sie das Interesse beträgt, nämlich mR. Da aber die Rente nach Verfluß von n Jahren erloschen ist, so müßte der, der das Kapital erhalten hätte, dasselbe in n Jahren wieder zurükgeben; und um die Rechnung aufs Baare zu bringen, muß er jezt den Werth des in n Jahren zu bezahlenden Kapitals mR baar zurükgeben; dieser Werth ist $mR\left(\frac{m}{m+1}\right)^n$. Der Rentier muß demnach mR erhalten, und $mR \times \left(\frac{m}{m+1}\right)^n$ zurükgeben; folglich muß er $mR\left(1-\left(\frac{m}{m+1}\right)^n\right)$ erhalten; mithin ist $s = mR\left(1-\left(\frac{m}{m+1}\right)^n\right)$, wie man durch die beyden ersten Verfahren gefunden hat.

Anmerkung. Die Gleichung $s = mR\left(1-\left(\frac{m}{m+1}\right)^n\right)$ schließt das Verhalten zwischen den vier Größen s, R, m, n in sich, vermittelst dessen man eine jede von diesen drey Größen durch die drey andern bestimmen kann (oder wenigstens als bestimmt denkt).

Gegebene Größen	Gesuchte
R, m, n . . .	$s = mR\left(1-\left(\frac{m}{m+1}\right)^n\right)$
s, m, n . . .	$R = \frac{1}{m}s \frac{1}{1-\left(\frac{m}{m+1}\right)^n}$
s, R, m, ...	$n = \frac{\text{Log.}\left(1-\frac{s}{mR}\right)}{\text{Log.}\frac{m}{m+1}}$
s, R, . n . . .	m

Die Bestimmung des Zinsfusses hängt von einer Gleichung ab, die zu verwickelt ist, um vermittelst der Elemente aufgelöst werden zu können, und für deren Auflösung man keine directe Methode, sondern blos die des Versuchens in jedem besondern Fall hat.

Zweyte Anmerkung. Wenn Rente, Kapital und Zinsfuß gegeben, und die Rente sich dem Interesse des Kapitals gleich findet, so muß sie fortwähren, und es gibt keine Anzahl von Jahren, nach deren Verfluß die Schuld durch Bezahlung dieser Rente getilgt wäre. Die Gleichung $\left(\frac{m}{m+1}\right)^n = 1-\frac{s}{mR}$, durch welche man n in s, R und m bestimmt, wird $\left(\frac{m}{m+1}\right)^n = 0$, welches eine unmögliche Gleichung ist; und am Ende wird diese Unmöglichkeit durch Hereinkommen des Logarithmen von Null angezeigt im Ausdruk des Werths von

$$n = \frac{\text{Log.}\left(1-\frac{s}{mR}\right)}{\text{Log.}\frac{m}{m+1}}.$$

Ist die Rente kleiner als das Interesse des Kapitals nach einem gegebenen Zinsfuß gegeben; so wird die Schuld immer größer und es gibt hier um so mehr keine Anzahl von Jahren, nach deren Verfluß sie getilgt wäre. Diese Unmöglichkeit wird durch den hereinkommenden Logarithmen von $1-\frac{s}{mR}$ angezeigt, welches der Ausdruk des Logarithmen

einer negativen Größe wird, wenn $s > mR$, und mithin $\frac{s}{mR} > 1$ ist. Und umgekehrt wird durch die anerkannte Unmöglichkeit von n in diesem Fall die Unmöglichkeit der Logarithmen negativer Größen erwiesen.

Ich will die vorhergehenden Formeln durch einige Beyspiele erläutern.

1°. Was ist der baare Werth einer 21 Jahre lang von jezt an zu bezahlenden Rente von 1000 Thalern, den Zinsfuß zu 5 p. C. gesezt?

Da die Rente von jezt an zu bezahlen ist, so muß man, um diesen Fall auf denjenigen zurükzuführen, da die Rente erst in einem Jahr anfienge, eine 20 Jahre lang vom nächsten Jahr an zu bezahlende Rente nehmen, und die jezt gleich zu bezahlenden tausend Thaler zum gefundenen Kapital hinzufügen.

Man hat also $R = 1000$

$$\frac{1}{m} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}; \quad m = 20$$

$$n = 20.$$

Folglich $s = 20000\left(1-\left(\frac{20}{21}\right)^{20}\right)+1000$

$$\text{Log. } \frac{20}{21} = -1.9788107$$

$$\text{Log. } \left(\frac{20}{21}\right)^{20} = -1.5762140$$

$$\text{Log. } 20000 = 4.3010300$$

$$\text{Log. } 20000\times\left(\frac{20}{21}\right)^{20} = 3.8772440$$

$$20000\times\left(\frac{20}{21}\right)^{20} = 7537'8$$

$$20000\left(1-\left(\frac{20}{21}\right)^{20}\right) = 13462'2$$

$$s = 13462'2$$

2°. Durch was für eine 15 Jahre lang vom nächsten Jahr an zu bezahlende Rente kann man sich einer in fünfzehen Jahren abzutragenden Schuld von 100000 Thalern entledigen, den Zinsfuß zu $4\frac{1}{2}$ p. C. gesezt?

Der baare Werth dieses Kapitals ist

$$100000 \times \left(\frac{100}{104\frac{1}{2}}\right)^{15} = 100000 \times \left(\frac{200}{209}\right)^{15}$$

folglich $s = 100000 \times \left(\frac{200}{209}\right)^{15}$

$\frac{1}{m} = \frac{4\frac{1}{2}}{100}$, $m = \frac{200}{9}$

$n = 15$

$$R = \frac{9}{200} \times 100000 \times \left(\frac{200}{209}\right)^{15} \times \frac{1}{1-\left(\frac{200}{209}\right)^{15}}$$

$$= 4500 \times \frac{1}{\left(\frac{209}{200}\right)^{15} - 1}$$

Log. $\frac{209}{200} = 0.0191163$

Log. $\left(\frac{209}{200}\right)^{15} = 0.2867445$

$\left(\frac{209}{200}\right)^{15} = 1'935283$

$\left(\frac{209}{200}\right)^{15} - 1 = 0'935283$

Log. $4500 = 3.6532125$

Log. $0'935283 = -1.9709430$

Log. $R = 3.6822695$

$R = 4811'3$

3°. Wieviel Jahre lang hat man eine Rente von 1000 Thalern vom nächsten Jahr an zu bezahlen, um eine Schuld von baar zu bezahlenden 10000 Thalern abzutragen, das Interesse zu 5 p. C. gerechnet?

Man hat also $s = 10000$

$R = 1000$

$\frac{1}{m} = \frac{5}{100}$; $m = 20$

$mR = 20000$

$\frac{s}{mR} = \frac{1}{2}$; $1 - \frac{s}{mR} = \frac{1}{2} = 0'5$

$$n = \frac{\text{Log. } \frac{1}{2}}{\text{Log. } \frac{20}{21}}$$

$$\text{Log. } \tfrac{1}{2} = -1.+6989700 = -0.3010300$$
$$\text{Log. } \tfrac{20}{21} = -1.+9788107 = -0.0211893$$
$$n = \frac{3010300}{211893} = 14^{\text{Jahre}}\ 2^{\text{Monate}}\ 14+^{\text{Tage}}$$
$$15-$$

Scholion. Obgleich der Gebrauch der Logarithmen die Auflösung der auf zusammengesezte Interessen und auf die Summationen geometrischer Progressionen sich beziehenden Aufgaben sehr erleichtert; so gibt es doch eine große Menge von diesem Gegenstand abhängiger Aufgaben, deren Auflösung man nicht durch directe Wege erhalten kann. Ich will zu den Beyspielen, welche wir schon hievon gehabt haben, nur noch folgendes hinzusezen.

Eine Person genießt eine jährliche Rente R, welche sie zu jährlichen Interessen von $\frac{1}{m}$ des Kapitals anbringt.

Eine andere Person genießt eine halbjährige Rente R', welche sie halbjährig zu $\frac{1}{2m}$ des Kapitals Interesse anbringt.

Man sezt R' sey kleiner als R.

Man fragt, nach Verfluß von wieviel Jahren die Erträge dieser beyden Renten gleich seyn werden?

Die gesuchte Anzahl von Jahren sey n.

Der Werth der ersten Rente nach Verfluß dieser Anzahl Jahre wird seyn

$$R\left(1+\frac{m+1}{m}+\left(\frac{m+1}{m}\right)^2+\left(\frac{m+1}{m}\right)^3+\ldots+\left(\frac{m+1}{m}\right)^{n-1}\right)$$
$$= mR\times\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n-1\right).$$

Der Werth der zweyten Rente nach Verfluß dieser Anzahl Jahre wird seyn

$$R'\left(1+\frac{2m+1}{2m}+\left(\frac{2m+1}{2m}\right)^2+\left(\frac{2m+1}{2m}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2m+1}{2m}\right)^{2n-1}\right)$$
$$= 2mR'\left(\left(\frac{2m+1}{2m}\right)^{2n}-1\right).$$

Man muß demnach haben

$$mR \times \left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - 1\right) = 2mR^1\left(\left(\frac{2m+1}{2m}\right)^{2n} - 1\right)$$

oder $$R \times \left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - 1\right) = 2R^1\left(\left(\frac{2m+1}{2m}\right)^{2n} - 1\right)$$

Mir ist keine directe Methode bekannt, um den Werth von n vermittelst dieser Gleichung zu bestimmen. Und ebenso aus noch stärkern Gründen würde es sich verhalten, wenn man den Unterschied der Werthe dieser beyden Renten nach Verfluß der gesuchten Zeit gäbe.

Ich gehe nun zu einer andern Art von Aufgaben über die geometrischen Progressionen über.

§. 210.

Aufgabe. Drey Zahlen in stetiger geometrischer Proportion finden, von welchen man ihre Summe und die Summe ihrer Quadrate kennt.

Die gegebene Summe der drey Zahlen sey 2s
die gegebene Summe der drey Quadrate sey 4q

Ben. Das mittlere Glied sey 2x
so ist die Summe der äussersten 2s - 2x
das Produkt der äussersten 4xx
das Quadrat der halben Differenz der äussersten
$(s-x)^2 - 4xx = (s+x)(s-3x))$
äusserste . . . . $s-x+\sqrt{((s+x)(s-3x))}$
$s-x-\sqrt{((s+x)(s-3x))}$
Summe der Quadrate der äussersten $2(s-x)^2+2(s+x)(s-3x)$
$= 4ss-8sx-4xx$
Summe der drey Quadrate $4ss-8sx$
Bed. $4ss-8sx = 4q$
Red. $ss-2sx = q$
$2sx = ss-q$
$x = \frac{1}{2}s-\frac{q}{2s}$

Aufl. $2x = s - \frac{q}{s}$ mittleres Glied

$2s - 2x = s + \frac{q}{s}$ Summe der äussern

$$(s-x)^2 - 4xx = \left(\frac{s+\frac{q}{s}}{2}\right)^2 - \left(s-\frac{q}{s}\right)^2 = \frac{\left(3s-\frac{q}{s}\right)\left(3\frac{q}{s}-s\right)}{2}$$

$$= \frac{10q - 3ss - 3\frac{qq}{ss}}{4}$$

$$\sqrt{((s+x)(s-3x))} = \frac{\sqrt{\left(10q-3ss-3\frac{qq}{ss}\right)}}{3}$$ halbe Differenz der äussern

$$\left.\begin{aligned} s-x+\sqrt{((s+x)(s-3x))} &= \frac{s+\frac{q}{s}+\sqrt{\left(10q-3ss-3\frac{qq}{ss}\right)}}{2} \\ s-x-\sqrt{((s+x)(s-3x))} &= \frac{s+\frac{q}{s}-\sqrt{\left(10q-3ss\ 3\frac{qq}{ss}\right)}}{2} \end{aligned}\right\}$$ die äussern

$$4ss - 8sx - 4xx = \frac{\left(s+\frac{q}{s}\right)^2 + \left(10q-3ss-3\frac{qq}{ss}\right)}{2}$$

$$= \frac{12q - 2ss - 2\frac{qq}{ss}}{2}$$

$= 6q - ss - \frac{qq}{ss}$ Summe der Quadrate der äussern

$4ss - 8sx = \left(6q - ss - \frac{qq}{ss}\right) + \left(ss - 2q + \frac{qq}{ss}\right)$

$= 4q$ Summe der drey Quadrate.

Erste Anmerkung. Obgleich die vorgelegte Frage in Beziehung auf den doppelten Werth jedes der beyden äussern Glieder (welche abwechseln können) vom zweyten Grad ist; so läßt sie sich doch auf den ersten Grad zurükführen, wenn man das mittlere Glied sucht, aus welchem man sodenn die Summe der äussern kennen lernt.

Zweyte Anmerkung. Die Einfachheit der Ausdrücke der Summe der drey Quadrate des mittlern Glieds und der

Sum-

Summe der äussern Glieder muß uns auf den Gedanken bringen, daß dieselbe sich auf eine einfachere als die hier gebrauchte Art finden lassen. Ich will dis nun untersuchen.

Es seyen A, B, C drey Größen in stetiger geometrischer Proportion.

1°. Der gefundene Ausdruk der Summe der Quadrate

$$= 4ss - 8sx = 2s(2s - 4x)$$

lauft darauf hinaus, daß man folgende Gleichung beweise:

$$(A+B+C)(A-B+C) = A^2 + B^2 + C^2$$

In der That ist $A^2+B^2+C^2 = A^2+2B^2+C^2-B^2$

$$= A^2+2AC+C^2-B^2$$
$$= (A+C)^2 - B^2.$$
$$= (A+B+C)(A-B+C)$$

das heißt: in einer stetigen geometrischen Proportion ist die Summe der Quadrate der drey Glieder dem Produkt aus der Summe und dem Unterschied der Summe der äussern und des mittlern Glieds gleich.

2°. Zieht man beyde Glieder der vorhergehenden Gleichung vom Quadrat der Summe der drey Glieder ab; so erhält man

$$(A+B+C)^2 - (A^2+B^2+C^2) = (A+B+C)2B$$

Dis stimmt mit dem zufolge der Gleichung

$$2x = s - \frac{q}{s}, \text{ oder } B = \frac{A+B+C}{2} - \frac{1}{2}\frac{A^2+B^2+C^2}{A \quad B+C}$$

gefundenen Werth des zweyten Glieds überein.

3°. Addirt man zu der Gleichung in 1°. das Quadrat der Summe der drey Glieder; so erhält man

$$(A+B+C)^2 + A^2+B^2+C^2 = 2(A+B+C)(A+C).$$

Dis stimmt mit dem vermöge der Gleichung

$$2s - 2x = s + \frac{q}{s}, \text{ oder } A+C = \frac{A+B+C}{2} + \frac{1}{2}\frac{A^2+B^2+C^2}{A+B+C}$$

gefundenen Werth der Summe der äussern überein.

4°. Das Quadrat des halben Unterschieds der äussern ist

$$\left(\frac{A+B+C}{2}+\tfrac{1}{4}\frac{A^2+B^2+C^2}{A+B+C}\right)^2-\left(\frac{A+B+C}{2}-\tfrac{1}{2}\frac{A^2+B^2+C^2}{A+B+C}\right)^2$$

$$=\left(3\frac{A+B+C}{4}-\tfrac{1}{4}\frac{A^2+B^2+C^2}{A+B+C}\right)\left(3\cdot\tfrac{1}{4}\frac{A^2+B^2+C^2}{A+B+C}-\frac{A+B+C}{4}\right)$$

Der erste Factor ist positiv, weil $3(A+B+C)^2 \rhd A^2+B^2+C^2$. Damit die halbe Differenz der äussern reell sey, und mithin auch die äussern reell seyen; so muß der zweyte Factor positiv seyn, und folglich muß man haben $3(A^2+B^2+C^2) \rhd (A+B+C)^2$. Welches ich auf folgende Art beweise.

Lehnsaz. Es sey eine stetige geometrische Proportion, die aus ungleichen Gliedern bestehe. Ich behaupte, daß die Summe der Quadrate der äussern grösser sey als das Produkt des mittlern Glieds durch die Summe der äussern.

Symbolisch. $AA+CC \rhd B(A+C)$.

Beweis. Da $A:B = B:C$, so ist

$$A+C \rhd 2B$$

folglich $A-B+C \rhd B$

und $(A+B+C)(A-B+C) \rhd B(A+B+C)$

Aber $(A+B+C)(A-B+C) = (A+C)^2-BB$

$$= AA+BB+CC$$

folglich $AA+BB+CC \rhd B(A+B+C)$

mithin $AA+CC \rhd B(A+C)$

Lehrsaz. Der Ueberschuß der dreyfachen Summe der Quadrate dreyer stetig proportionirter Größen über das Quadrat ihrer Summe ist dem doppelten Ueberschuß der Summe der Quadrate der äussern über das Produkt des mittlern Glieds durch die Summe der äussern gleich.

Symbolisch. $3(A^2+B^2+C^2)-(A+B+C)^2$

$$=2(A^2+C^2-B(A+C))$$

Beweis. $3(A^2+B^2+C^2)-(A+B+C)^2$
$=3(A^2+B^2+C^2)-(A^2+B^2+C^2)-2(AB+AC+BC)$
$=2(A^2+B^2+C^2)-2(AB+AC+BC)$
$=2(A^2+C^2)-2B(A+C)$
$=2(A^2+C^2-B(A+C))$

Beyspiel. Für die vorliegende Aufgabe.

Es sey $2s=26 \quad s=13$
$4q=364 \quad q=91$

So ist mittleres Glied $13-\frac{91}{13}=13-7=6$
Summe der äussern . . . $=20$
halbe Summe der äussern . . $=10$
Quadrat ihrer halben Differenz $=100-36=64$
halbe Differenz der äussern . . $=8$
äussere . . . . $10+8=18$
$10-8=2$
Proportion . . . . 2, 6, 18.

Desgleichen sey $2s=38 \quad 2s=49$
$4q=532 \quad 4q=931$

Allgemeine Aufgabe. Drey stetig proportionirte Zahlen finden, von welchen man die $\begin{matrix}\text{Summe}\\\text{Differenz}\end{matrix}$ der Summe der äussern und des mittlern Glieds; und die $\begin{matrix}\text{Summe}\\\text{Differenz}\end{matrix}$ der Summe der Quadrate der äussern und des Quadrats des mittlern Glieds kennt.

§. 211.

Aufgabe. Vier stetig proportionirte Zahlen finden, von welchen man die Summe der äussersten und die Summe der mittlern kennt.

Gegebene Summe der äussern . . . 2s

gegebene Summe der mittlern . . . 2s'

Ben. Unterschied der mittlern . . . 2x

mittlere Glieder . . . . . $s+x,\ s-x$

äusserste Glieder . . . . . $\frac{(s+x)^2}{s-x},\ \frac{(s-x)^2}{s+x}$

Summe der äussersten $\frac{(s+x)^3+(s-x)^3}{ss-xx} = 2s \times \frac{ss+3xx}{ss-xx}$

Bed. $2s \times \frac{ss+3xx}{ss-xx} = 2s'$

Red. $ss+3xx : ss-xx = s' : s$

$4xx : ss-xx = s'-s : s$

$xx : ss-xx = s'-s : 4s$

$xx : ss = s'-s : s'+3s$

Aufl. $x = s\sqrt{\frac{s'-s}{s'+3s}}$

$$s+x = s\left(1+\sqrt{\frac{s'-s}{s'+3s}}\right)$$

$$s-x = s\left(1-\sqrt{\frac{s'-s}{s'+3s}}\right)$$

$$\frac{(s+x)^2}{s-x} = s \times \frac{\left(1+\sqrt{\frac{s'-s}{s'+3s}}\right)^2}{1-\sqrt{\frac{s'-s}{s'+3s}}} = (s'+3s) \times \frac{\left(1+\sqrt{\frac{s'-s}{s'+3s}}\right)^3}{4}$$

$$\frac{(s-x)^2}{s+x} = s \times \frac{\left(1-\sqrt{\frac{s'-s}{s'+3s}}\right)^2}{1+\sqrt{\frac{s'-s}{s'+3s}}} = (s'+3s) \times \frac{\left(1-\sqrt{\frac{s'-s}{s'+3s}}\right)^3}{4}$$

$$\frac{(s+x)^2}{s-x} + \frac{(s-x)^2}{s+x} = (s'+3s) \times \frac{\left(1+\sqrt{\frac{s'-s}{s'+3s}}\right)^3 + \left(1-\sqrt{\frac{s'-s}{s'+3x}}\right)^3}{4}$$

$$= (s'+3s) \times \frac{1+3\frac{s'-s}{s'+3s}}{2}$$

$$= (s'+3s) \times \frac{4s'}{2(s'+3s)} = 2s'$$

Erste Anmerkung. Damit die Aufgabe möglich sey, darf nur s' größer als s seyn.

Zweyte Anmerkung. Die Einfachheit der Gleichungen und Proportionen, auf die wir gekommen sind, muß uns veranlassen, dieselbe auf eine mehr unmittelbare Art aus den Eigenschaften der geometrischen Proportionen zu schliessen:

Es seyen demnach A, B, C, D vier stetig proportionirte Größen.

1°. Die Gleichung $(s+x)^3+(s-x)^3 = 2s'(ss-xx)$

oder $B^3+C^3 = (A+D)BC$

lehrt uns, daß in einer geometrischen Progression von vier Gliedern die Summe der Würfel der mittlern dem Produkt der Summe der äussersten durch das Produkt der mittlern (oder der äussersten) gleich ist.

In der That ist

$$B^3 = B\times BB = B\times AC = A\times BC$$
$$C^3 = C\times CC = C\times BD = D\times BC$$

folglich $B^3+C^3 = (A+D)BC$

Ebenso erhält man

$$B^3-C^3 = (A-D)BC$$

2°. Die Proportion

$$s'+3s : s'-s = ss : xx$$

oder $A+3B+3C+D : A-B-C+D = (B+C)^2 : (B-C)^2$

läßt sich auf folgende Art beweisen.

Da $A:B=B:C=C:D$;

so ist $A+B+C : B+C+D = B:C$

$$A+2B+2C+D : B+C+D = B+C:C$$
$$A+3B+3C+D : B+2C+D = B+C:C$$
$$= 4(B+C):4C$$

$A+{}_3B+{}_3C+D:A-B-C-D=B+{}_2C+D:B-{}_2C+D$

$=BB+{}_2BC+BD:BB-{}_2BC+BD$

$=BB+{}_2BC+CC:BB-{}_2BC+CC$

$=(B+C)^2:(B-C)^2$

Daher $A+3B+3C+D:B+C=(B+C)^2:BC$

und $A+B+C+D:B+C=B^2+C^2:BC$

Man kann auch den Unterschied der äussersten auf folgende Art bestimmen:

Da $A:B=B:C=C:D$,

so ist $A+B+C:B+C+D=B:C$

folglich $A+{}_2B+{}_2C+D:A-D=B+C:B-C$

$(A+{}_2B+{}_2C+D)^2:(A-D)^2=(B+C)^2:(B-C)^2$

$=A+{}_3B+{}_3C+D:A-B-C+D$

oder $A+3B+3C+D:A-B-C+D$

$=(A+{}_2B+{}_2C+D)^2:(A-D)^2$

Beyspiel für vorliegende Aufgabe.

Es sey $2s=60 \quad s=30$

$2s'=70 \quad s'=35$

so ist $\frac{B-C}{2}=30\sqrt{\frac{5}{35+90}}=30\times\frac{1}{5}=6$

$\frac{A-D}{2}=95\sqrt{\frac{5}{35+9}}=95\times\frac{1}{5}=19$

daher $B=30+6=36 \quad A=35+19=54$

$C=30-6=24 \quad D=35-19=16$

$54:36=3:2$

$36:24=3:2$

$24:16=3:2$

Mithin $A:B=B:C=C:D$

Desgleichen sey $2s=168 \quad 2s=140$

$2s'=182 \quad 2s'=266$

Andere Aufgaben. Vier stetig proportionirte Grösſen finden, von welchen man die Differenz der äusſersten und die Differenz der mittlern kennt.

Diese Aufgabe veranlaßt zu einigen Lehrsäzen, welche den bey Gelegenheit der vorhergehenden Aufgabe entwickelten analog sind. Man kann auch die Auflösung derselben unmittelbar aus der vorhergehenden Aufgabe schliessen.

Folgende Aufgaben: vier stetig proportionirte Größen finden, von welchen man die Summe der äusſersten und die Differenz der mittlern, oder die Differenz der äusſersten und die Summe der mittlern kennt, führen auf Gleichungen, die über den zweyten Grad hinausgehen.

Vier stetig proportionirte Zahlen finden, von welchen bekannt sind die Summe der beyden ersten und die Summe der beyden lezten;

Desgleichen die Differenz der beyden ersten, und die Differenz der beyden lezten.

Desgleichen die Summe des ersten und dritten, und die Summe des zweyten und vierten.

Desgleichen die Differenz des ersten und dritten, und die Differenz des zweyten und vierten.

§. 212.

Aufgabe. Fünf geometrisch proportionirte Zahlen finden, von welchen man die Summe der zweyten und vierten 2s, und die Summe der ersten und fünften 4s' kennt.

Ben. Das mittlere Glied sey x
so ist das Produkt des zweyten und vierten . . . xx
der halbe Unterschied des zweyten und vierten $\sqrt{(ss-xx)}$
zweytes und viertes Glied . . . . $s+\sqrt{(ss-xx)}$
$s-\sqrt{(ss-xx)}$

erstes und fünftes Glied $\frac{(s+\sqrt{(ss-xx)})^2}{x}$ $\frac{(s-\sqrt{(ss-xx)})^2}{x}$

Summe des ersten und fünften Glieds $\frac{2ss+2(ss-xx)}{x} = \frac{2(2ss-xx)}{x}$

Bed. $\frac{2(2ss-xx)}{x} = 4s'$

Red. $2ss - xx = 2s'x$

$xx + 2s'x = 2ss$

$xx + 2s'x + s'^2 = 2ss + s'^2$

$x = \sqrt{(2ss+s'^2)} - s'$

$s + x = s + \sqrt{(2ss+s'^2)} - s'$

$s - x = s + s' - \sqrt{(2ss+s'^2)}$

$ss - xx = 2s'\sqrt{(2ss+s's')} - (ss + 2s's')$.

Erste Anmerkung. Wenn man $2s' > s$ gibt, oder die Summe des ersten und fünften größer als die Summe des zweyten und vierten Glieds; so ist die Aufgabe immer möglich. Nämlich wenn $2s' > s$; so behaupte ich, daß $2s'\sqrt{(2ss+s's')} > ss + 2s's'$

Denn da $2s' > s$

so ist $4sss's' > s^4$

folglich $8sss's' + 4s'^4 > s^4 + 4sss's' + 4s'^4$

oder $4s's'(2ss+s's') > (ss+2s's')^2$

mithin $2s'\sqrt{(2ss+s's')} > ss + 2s's'$

Zweyte Anmerkung. Die Einfachheit der Gleichung

$$xx + 2s'x = 2ss,$$

aus welcher man den Werth von x geschlossen hat, darf glauben machen, daß man zu derselben auf eine einfachere als die vorhergehende Art gelangen könne.

Es seyen A, B, C, D, E fünf geometrisch proportionirte Größen; ich behaupte, daß

$$C\left(\frac{A+E}{2}+C\right) = 2\left(\frac{B+D}{2}\right)^2$$

oder $C(A+2C+E) = (B+D)^2$

In der That ist $AC = BB$

$2CC = 2BD$

$CE = DD$

folglich $C(A+2C+E) = BB+2BD+DD$

$= (B+D)^2$.

Dritte Anmerkung. Wenn man statt des mittlern Glieds das zweyte und vierte sucht; so bestimmt man ihren Unterschied durch eine biquadratische Gleichung auf folgende Art:

Ben. Unterschied des zweyten und vierten Glieds $2x$

zweytes und viertes Glied . . $s+x, s-x$

mittleres Glied . . . . $\sqrt{(ss-xx)}$

erstes und fünftes Glied . . . . $\frac{(s+x)^2}{\sqrt{(ss-xx)}}$

$\frac{(s-x)^2}{\sqrt{(ss-xx)}}$

Summe des ersten und fünften Glieds . . $\frac{2(ss+xx)}{\sqrt{(ss-xx)}}$

Bed. $\frac{2(ss+xx)}{\sqrt{(ss-xx)}} = 4s'$

Red. $\frac{ss+xx}{\sqrt{(ss-xx)}} = 2s'$

$\frac{(ss+xx)^2}{ss-xx} = 4s's'$

$x^4+2xx(ss+2s's') = ss(4s's'-ss)$

Beyspiel für vorliegende Aufgabe

Es sey $2s = 40 \quad s = 20$

$4s' = 68 \quad s' = 17$

so ist	ss = 400	
	s's' = 289	
	2ss = 800	
	2ss+s's' = 1089	
	$\sqrt{(2ss+s's')}$ = 33	
	$\sqrt{(2ss+s's')}-s'$ = 16	
mittleres Glied	. . . . .	16
Quadrat des halben Unterschieds des zweyten und vierten Glieds	. . .	400-256 = 144
zweytes und		20+12 = 32
viertes Glied	. . . .	20-12 = 8
		64
äusserste Glieder	. . . . .	4
Progression	. . .	4, 8, 16, 32, 64.

Andere Aufgaben. Man kennt die Differenz der äussersten, und die Differenz des zweyten und vierten Glieds.

Man kennt die Summe der geraden Glieder, und die Summe der ungeraden.

Man kennt die Summe der geraden Glieder und den Ueberschuß der Summe der äussersten über das mittlere.

Man kennt die Summe der äussersten, und die Summe der drey mittlern.

Man kennt die Summe der äussersten, und den Ueberschuß der Summe des zweyten und vierten über das mittlere.

Anm. Diese Aufgaben geben zu verschiedenen dem in der zweyten Anmerkung vorgetragenen analogen Lehrsäzen über die aus fünf Gliedern bestehenden geometrischen Progressionen Gelegenheit.

§. 213.

Aufgabe. Sechs Zahlen in geometrischer Progression

finden, indem man die Summe ihrer beyden mittlern 2s, und die Summe ihrer beyden äussersten $2s'$ kennt.

Ben. Unterschied der beyden mittlern Glieder . . 2x

mittlere Glieder . . . . $s+x$, $s-x$

zweytes . . . . . $\frac{(s+x)^2}{s-x}$

und fünftes Glied . . . . $\frac{(s-x)^2}{s+x}$

erstes . . . . . $\frac{(s+x)^3}{(s-x)^2}$

und sechstes Glied . . . . $\frac{(s-x)^3}{(s+x)^2}$

Summe der äussersten $\frac{(s+x)^5+(s-x)^5}{(ss-xx)^2} = 2s \times \frac{s^4+10ssxx+5x^4}{(ss-xx)^2}$

Bed. $2s \times \frac{s^4+10ssxx+sx^4}{(ss-xx)^2} = 2s'$

Red. $s(s^4+10ssxx+5x^4) = s'(s^4-2ssxx+x^4)$

Erster Fall. Es sey $5s=s'$; man erhält

$$ss+10xx = 5(ss-2xx)$$
$$20xx = 4ss$$
$$xx = \tfrac{1}{5}ss$$

Aufl. $x = \frac{1}{\sqrt{5}}s$

$$s+x = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}s, \quad s-x = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}s$$

$$\frac{s+x}{s-x} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}s = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}s, \quad \frac{s-x}{s+x} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}s = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}s$$

$$\frac{(s+x)^2}{s-x} = \frac{(\sqrt{5}+1)^3}{4\sqrt{5}}s, \qquad \frac{(s-x)^2}{s+x} = \frac{(\sqrt{5}-1)^3}{4\sqrt{5}}s$$

$$\frac{(s+x)^3}{(s-x)^2} = \frac{(\sqrt{5}+1)^5}{16\sqrt{5}}s, \qquad \frac{(s-x)^3}{(s+x)^2} = \frac{(\sqrt{5}-1)^5}{16\sqrt{5}}s$$

Zweyter Fall. Es sey $s' > 5s$. Man erhält

$$x^4(s'-5s) - 2ssxx(s'+5s) + s^4(s'-s) = 0$$
$$x^4(s'-5s)^2 - 2ssxx(s'+5s)(s'-5s) + s^4(s'-s)(s'-5s) = 0$$
$$x^4(s'-5s)^2 - 2ssxx(s'+5s)(s'-5s) + s^4(s'+5s)^2$$
$$= 4s^4(4ss'+5ss)$$
$$xx(s'-5s) - ss(s'+5s) = \pm 2ss\sqrt{(4ss'+5ss)}$$
$$xx = ss \times \frac{s'+5s \pm 2\sqrt{(4ss'+5ss)}}{s'-5s}$$

Erste Anmerkung. Sezt man $s' > 5s$, so sind die beyden Werthe von xx positiv, und folglich die vier Werthe von x reell.

In der That: da $s' > 5s$,

so ist $(s'-s)(s'-5s) > 0$

oder $s's' - 6ss' + 5ss > 0$

folglich $s's' + 10ss' + 25ss > 16ss' + 20ss.$

$$s' + 5s > 2\sqrt{(4ss' + 5ss)}$$

Zweyte Anmerkung. Die Formel

$$xx = ss \times \frac{s'+5s+2\sqrt{(4ss'+5ss)}}{s'-5s},$$

welche für die Voraussezung $s' > 5s$ geschlossen wurde, gibt, auf die Voraussezung $s' = 5s$ angewandt,

$$xx = ss \times \frac{10s+2\sqrt{25ss}}{0 \times 5s} = 4ss \times \frac{1}{0},$$

welches das Zeichen der Unmöglichkeit ist.

Die zweyte Formel

$$xx = ss \times \frac{s'+5s'-2\sqrt{(4ss'+5ss)}}{s'-5s}$$

wird $ss \times \frac{10s-10s}{5s-5s} = 2ss \times \frac{0}{0}$. Um den dieser Voraussezung entsprechenden Werth von xx zu erhalten, multiplicire man die beyden Glieder des Bruchs

$$\frac{s'+5s-2\sqrt{(4ss'+5ss)}}{s'-5s}$$

durch $s' + 5s + 2\sqrt{(4ss' + 5ss)}$; so erhält man

$$xx = ss \times \frac{(s' + 5s)^2 - 4(4ss' + 5ss)}{(s' - 5s)(s' + 5s + 2\sqrt{(4ss' + 5ss)})}$$

$$= ss \times \frac{(s' - s)(s' - 5s)}{(s' - 5s)(s' + 5s + 2\sqrt{(4ss' + 5ss)})}$$

$$= ss \times \frac{s' - s}{s' + 5s + 2\sqrt{(4ss' + 5ss)}}$$

für alle Fälle. Nun sey $s' = 5s$; so hat man

$xx = ss \times \frac{4s}{10s + 2.5s} = ss\,\frac{4}{20} = ss \times \frac{1}{5}$, wie vorhin.

Dritter Fall. Es sey $s' < 5s$.

Aus der Gleichung

$$x^4(5s - s') + 2ssxx(s' + 5s) - s^4(s' - s) = 0,$$

schließt man $xx = ss \times \frac{\mp 2\sqrt{(4ss' + 5ss)} - (s' + 5s)}{5s - s'}$

Die erste Formel $xx = ss \times \frac{-2\sqrt{(4ss' + 5ss)} - (s' + 5s)}{5s - s'}$

gibt für x einen imaginären Werth.

Zufolge der zweyten Formel ist

$$xx = ss \times \frac{2\sqrt{(4ss' + 5ss)} - (s' + 5s)}{5s - s'}$$

$$= ss \times \frac{4(4ss' + 5ss) - (s' + 5s)^2}{(5s - s')(2\sqrt{(4ss' + 5ss)} + (s' + 5s))}$$

$$= ss \times \frac{(s' - s)(5s - s')}{(5s - s')(2\sqrt{(4ss' + 5ss)} + s' + 5s)}$$

$$= ss \times \frac{s' - s}{2\sqrt{(4ss' + 5ss)} + s' + 5s}$$

Dieser Werth ist positiv und mithin x reell, wenn nur $s' > s$ gegeben ist. Für den Fall $s' = 5s$, gibt sie auch

$$xx = \frac{1}{5}ss.$$

Erstes Beyspiel. Es sey $2s' = 244$ $s' = 122$

$2s = 36$ $s = 18$

So ist $5s = 90$; folglich $s' \triangleright 5s$, und folglich bezieht sich dieses Beyspiel auf den zweyten Fall.

Man erhält $xx = 324 \times \frac{212 \pm 204}{32}$

$$= 324 \times \left\{\begin{matrix} 416 \\ 8 \end{matrix}\right\}_{32} = 324 \left\{\begin{matrix} 51 \\ 1 \end{matrix}\right\}_{4}$$

$$= \left\{\begin{matrix} 324 \times 13 \\ 81 \end{matrix}\right\}$$

$$x = \left\{\begin{matrix} 18\sqrt{13} \\ 9 \end{matrix}\right\}$$

Der zweyte Werth $x = 9$ gibt die Progression

1, 3, 9, 27, 81, 243.

Der erste Werth gibt als mittlere Glieder $18(1 - \sqrt{13})$
$18(1 + \sqrt{13})$
und die Progression besteht aus abwechslungsweise positiven und negativen Gliedern.

Zweytes Beyspiel. Es sey $2s' = 66$ $s' = 33$
$2s = 24$ $s = 12$
So ist $5s = 60$, $s' < 5s$; mithin bezieht sich dieses Beyspiel auf den dritten Fall.

Man erhält $xx = 144 \times \frac{2 \times 48 - 93}{27} = 16$,

$x = 4$

Gesuchte Progression . . 2, 4, 8, 16, 32, 64.

Andere Aufgaben. Man kennt die Differenz der äussersten Glieder, und die Differenz der mittleren Glieder.

Man kennt die Summe der äussersten, und die Summe des zweyten und vierten Glieds.

Man kennt die Differenz der äussersten, und die Differenz des zweyten und vierten Glieds.

Man kennt die Summe der äussersten und die Summe der vier Mittelglieder.

Man kennt die Summe der äussersten und den Ueberschuß der Summe des zweyten und fünften Glieds über die Summe des dritten und vierten.

Diese Probleme geben Gelegenheit zu verschiedenen Lehrsäzen über die aus sechs Gliedern bestehenden geometrischen Progressionen.

Beyspiel. Es sey die Summe 2s des zweyten und fünften Glieds gegeben, und die Summe 2s' des ersten und sechsten.

Nennt man die Summe der mittlern 2x, so bestimmt man dieselbe durch die Gleichung $x(x+s'-s)=ss$; welche zu folgendem Lehrsaz Anlaß gibt.

Lehrsaz. Es seyen A, B, C, D, E, F sechs Glieder in geometrischer Progression; ich behaupte, daß

$$(C+D)(A-B+C+D-E+F)=(B+E)^2$$

Bew.
$$(C+D)(A-B+C+D-E+F)$$
$$=AC-BC+CC+CD-CE+CF$$
$$+AD-BD+CD+DD-DE+DF$$
$$=AC\quad+2CD\quad+DF$$

(weil $AD=BC$
$BD=CC$
$CE=DD$
$CF=DE$)

$$=BB+2BE+EE$$
$$=(B+E)^2$$

§. 214.

Aufgabe. Vier stetig proportionirte Zahlen finden, von welchen man die Summe, und die Summe ihrer Quadrate kennt.

Die gegebene Summe dieser vier Zahlen sey 4s

die gegebene Summe ihrer Quadrate 4q

Ben. Summe der mittlern Glieder 2x

Unterschied der mittlern Glieder 2y

Mittlere Glieder . . . . . $x+y,\ x-y$

äusserste Glieder . . . . . $\frac{(x+y)^2}{x-y},\ \frac{(x-y)^2}{x+y}$

Summe der äussern Glieder $\frac{(x+y)^3+(x-y)^3}{xx-yy} = 2x \times \frac{xx+3yy}{xx-yy}$

Summe der vier Glieder $2x\left(1+\frac{xx+3yy}{xx-yy}\right) = 4x \cdot \frac{xx+yy}{xx-yy}$

Summe der Quadrate der mittlern . . . $2(xx+yy)$

Summe der Quadrate der äussersten . . $\frac{(x+y)^6+(x-y)^6}{(xx-yy)^2}$

$$= 2 \times \frac{x^6+15x^4yy+15xxy^4+y^6}{(xx-yy)^2}$$

$$= 2\frac{(xx+yy)(x^4+14xxyy+y^4)}{(xx-yy)^2}$$

Summe der vier Quadrate $2(xx+yy)\left(1+\frac{x^4+14xxyy+y^4}{(xx-yy)^2}\right)$

$$= 4(xx+yy)\left(\frac{x^4+6xxyy+y^4}{(xx-yy)^2}\right)$$

$$= 4(xx+yy) \times \frac{(xx+yy)^2+4xxyy}{(xx-yy)^2}$$

Bed. $\begin{cases} 4x \times \frac{xx+yy}{xx-yy} = 4s\,(A) \\ 4(xx+yy) \times \frac{(xx+yy)^2+4xxyy}{(xx-yy)^2} = 4q\,(B) \end{cases}$

Red. Aus der Gleichung (A) schließt man die Proportion

$$xx+yy : xx-yy = s : x$$

daher

daher $xx : yy = s+x : s-x$

$$yy = xx \times \frac{s-x}{s+x}$$

$$xx+yy = xx \times \frac{2s}{s+x}$$

$$xx-yy = xx \times \frac{2x}{s+x}$$

Man substituire diese Werthe in der Gleichung (B); so erhält man

$$xx \times \frac{2s}{s+x} \times \frac{x^4 \times \frac{4ss}{(s+x)^2} + 4x^4 \times \frac{s-x}{s+x}}{x^4 \times \frac{4xx}{(s+x)^2}} = q$$

daher $xx \times \frac{2s}{s+x} \times \frac{4ss+4(ss-xx)}{4xx} = q$

$$\frac{2s}{s+x} \times (2ss-xx) = q$$

$$4s^3-2sxx = qs+qx$$

$$x(q+2sx) = s(4ss-q)$$

$$x\left(\frac{q}{2s}+x\right) = 2ss-\tfrac{1}{2}q$$

$$xx+\frac{q}{2s}x+\frac{qq}{16ss} = 2ss-\tfrac{1}{2}q+\frac{qq}{16ss} = ss+\left(s-\frac{q}{4s}\right)^2$$

$$x+\frac{q}{4s} = \sqrt{\left(ss+\left(s-\frac{q}{4s}\right)^2\right)}$$

Aufl. $x = \sqrt{\left(ss+\left(s-\frac{q}{4s}\right)^2\right)} - \frac{q}{4s}$, halbe Summe der mittlern,

$2s-x = 2s+\frac{q}{4s}-\sqrt{\left(ss+\left(s-\frac{q}{4s}\right)^2\right)}$, halbe Summe der äussersten

So ist mithin die vorgelegte Aufgabe über vier stetig proportionirte Größen, von welchen Summe, und Summe der Quadrate bekannt ist, auf die in §. 211. aufgelöste Aufgabe zurükgeführt, wo man vier stetig proportionirte Grössen suchte, von welchen die Summe der äussersten und die Summe der mittlern Glieder bekannt war.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist eine der merkwürdigsten von denen, die auf den zweyten Grad gebracht werden können, und hat sehr viele Mathematiker beschäftigt, welche mehr oder weniger elegante Auflösungen davon gegeben haben. Die Gleichung

$$x\left(\frac{q}{2s}+x\right)=2ss-\frac{1}{2}q$$

oder die Proportion

$$x:s=2s-\frac{q}{2s}:\frac{q}{2s}+x$$

reducirt die Frage dahin, daß man zwey Grösen x, $\frac{q}{2s}+x$ finde, deren Differenz $\frac{q}{2s}$ und Produkt $2ss-\frac{1}{2}q$ man kennt. Die Einfachheit dieser Reduction kann uns auf die Vermuthung bringen, daß man zu diesem Resultat auf eine lichtvollere Art, als vorhin geschah, gelangen könne. Folgendes auf die Eigenschaften der Proportionen im allgemeinen und der stetigen Proportionen insbesondere gegründetes Verfahren scheint mir sehr lichtvoll, und stimmt mit dem von Cardan in seinem Werk, betitelt Practica Arithmetica Cap. 66um, Ex. 95um entwickelten überein.

Es seyen vier geometrisch proportionirte Grösen A, B, C, D: man hat zu beweisen, daß

$$B+C:\frac{A+B+C+D}{2}$$

$$=A+B+C+D-\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D}:\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D}+B+C.$$

Ich will dis durch eine Reyhe von Sazen beweisen, die aus der Natur der Progressionen folgen.

1°. $A^2+B^2+C^2+D^2$

$$=(A+D)^2+(B-C)^2=(A-D)^2+(B+C)^2$$

weil $AD=BC$

2°. $A^2+B^2+C^2+D^2=A(A+C)+D(B+D)$

weil $AC=BB$, und $BD=CC$.

3°. $(A+B)(C+D)=(B+C)^2$, weil $A+B:B+C$
$=B+C:C+D$.

4°. $(A+B+C+D)^2=(A+B)^2+2(B+C)^2+(C+D)^2$.

Bew. $(A+B+C+D)^2$
$=(A+B)^2+2(A+B)(C+D)+(C+D)^2$
$=(A+B)^2+2(B+C)^2+(C+D)^2$ (3°.)

5°. $A^2+B^2+C^2+D^2 : A^2+C^2 = A+B+C+D : A+B$

Bew. $A^2:B^2=B^2:C^2=C^2:D^2$
folglich $A^2+C^2:B^2+D^2=A^2:B^2=A:C=A+B:C+D$
mithin $A^2+B^2+C^2+D^2:A^2+C^2=A+B+C+D:A+B$

6°. $A^2+C^2:AB+CD = A+B:B+C$

Bew. $A^2:AB = C^2:CD$
folglich $A^2+C^2:AB+CD = A+B:B+C$.

7°. Man seze die beyden Proportionen 5° und 6° zusammen; man erhält
$A^2+B^2+C^2+D^2:AB+CD=A+B+C+D:B+C$

8°. $A^2+B^2+C^2+D^2:2(AB+CD)$
$=A+B+C+D:2(B+C)$
folglich $A^2+B^2+C^2+D^2:(A+B)^2+(C+D)^2$
$A+B+C+D:A+3B+3C+D$.

9°. Man seze statt $(A+B)^2+(C+D)^2$ seinen Werth $(A+B+C+D)^2-2(B+C)^2$ (4°); so erhält man
$A^2+B^2+C^2+D^2:(A+B+C+D)^2-2(B+C)^2$
$=A+B+C+D:A+3B+3C+D$.

10°. Daher
$A^2+B^2+C^2+D^2:(A+B+C+D)^2-2(B+C^2$
$=(A+B+C+D)^2:(A+B+C+D)^2+2(A+B+C+D)(B+C)$
folglich $(A+B+C+D)^2-(A^2+B^2+C^2+D^2):2(B+C)$
$(A+2B+2C+D)=A+B+C+D:A+3B+3C+D$,

oder $(A+B+C+D)^2 - (A^2+B^2+C^2+D^2) : 2(B+C)$
$(A+B+C+D) = A+2B+2C+D : A+3B+3C+D$

folglich $A+B+C+D - \frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D} : 2(B+C)$
$= A+2B+2C+D : A+3B+3C+D$

daher $B+C+\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D} : A+B+C+D$
$= A+B+C+D - \frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D} : 2(B+C)$

folglich $B+C+\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D} : \frac{A+B+C+D}{2}$
$= A+B+C+D - \frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D} : B+C$

In dieser Proportion kennt man die mittlern Glieder, und den Unterschied $\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D}$ der beyden äussersten; folglich sind die beyden äussersten bekannt.

11°. Hieraus bestimmt man unmittelbar die Summe der äussersten.

$2(B+C)+2\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D} : A+B+C+D = A+B+C+D -$
$\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D} : B+C$

$3\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D} - (A-B-C+D) : A+D = 2(B+C)+2$
$\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D} : A+B+C+D$

$3\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D} - (A-B-C+D) : 2(A+D) = B+C+$
$\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D} : A+B+C+D$

$3\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D} + A+B+C+D : 2(A+D) = A+2B+2C+D$
$+\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D} : A+B+C+D.$

Oder

$$3\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D}+A+B+C+D : A+D = A+2B+2C+D+\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D} : \frac{A+B+C+D}{2}$$

In dieser Progression kennt man die äussersten, und die Summe $2(A+B+C+D)+\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{A+B+C+D}$ der mittlern; folglich sind die mittlern auch bekannt, und namentlich ist die Summe $A+D$ bekannt.

Beyspiel für vorliegende Aufgabe.

Es sey $4s = A+B+C+D = 40$

$4q = A^2+B^2+C^2+D^2 = 820$

$B+C+\frac{820}{40} : 20 = 40-\frac{820}{40} : B+C$

$B+C+20{,}5 : 20 = 40-20{,}5 : B+C$

$(B+C)^2+20{,}5(B+C) = 20\times 19{,}5 = 390$

$(B+C)^2+20{,}5(B+C)+105{,}0625 = 495{,}0625$

$B+C+10{,}25 = 22{,}25$

$B+C = 12$

$A+D = 28$

Daher $\frac{B+C}{2} = 6$

$\frac{B-C}{2} = 3$

$B = 9$

$C = 3$

Progression: 1, 3, 9, 27

$1+3+9+27 = 40$

$1+9+81+729 = 820.$

Andere Aufgaben. Vier Zahlen in geometrischer Progression finden, von welchen man den Ueberschuß der Summe der äussersten über die Summe der mittlern, und den

Ueberschuß der Summe der Quadrate der äussersten über die Summe der Quadrate der mittlern kennt.

Vier Zahlen in geometrischer Progression finden, von welchen man den Ueberschuß der Summe der ungeraden Glieder über die Summe der geraden, und die Summe der Quadrate von allen vieren kennt.

Vier Zahlen in geometrischer Progression finden, von welchen man den Ueberschuß der Summe der ungeraden Glieder über die Summe der geraden, und auch den Ueberschuß der Summe der Quadrate der ungeraden Glieder über die Summe der Quadrate der geraden kennt.

Diese Aufgaben geben zu Lehrsäzen Gelegenheit, welche den in der Entwiklung der ersten Aufgabe enthaltenen analog sind.

Folgende Aufgaben: Vier Zahlen in geometrischer Progression finden, von denen man den Ueberschuß der Summe der äussersten über die Summe der mittlern, und die Summe der Quadrate aller viere kennt, oder von welchen man die Summe aller viere und den Ueberschuß der Summe der Quadrate der äussersten über die Summe der Quadrate der mittlern kennt; führen auf höhere Gleichungen als vom zweyten Grade.

§. 215.

Fünf Zahlen in geometrischer Progression finden, von welchen man die Summe 25, und die Summe ihrer Quadrate 41 kennt.

Ben. Es sey die Summe der beyden geraden Glieder $2x$

ihre Differenz . . . . $2y$

zweytes und viertes Glied . . . $x+y$, $x-y$

drittes Glied . . . . $\sqrt{(xx-yy)}$

erstes und fünftes Glied $\frac{(x+y)^2}{\sqrt{(xx-yy)}}$, $\frac{(x-y)^2}{\sqrt{(xx-yy)}}$

Summe der ungeraden Glieder $\frac{2(xx+yy)}{\sqrt{(xx-yy)}} + \sqrt{(xx-yy)}$

$$= \frac{3xx+yy}{\sqrt{(xx-yy)}}$$

Summe der fünf Quadrate $\frac{2(x^4+6xxyy+y^4)}{xx-yy} + 2(xx+yy) + xx-yy$

$$= \frac{2(x^4+6xxyy+y^4)}{xx-yy} + 3xx+yy$$

$$= \frac{5x^4+10xxyy+y^4}{xx-yy}$$

Bed. $\begin{cases} \frac{3xx+yy}{\sqrt{(xx-yy)}} + 2x = 2s\,(A) \\ \frac{5x^4+10xxyy+y^4}{xx-yy} = 4q\,(B) \end{cases}$

Red. $\frac{3xx+yy}{\sqrt{(xx-yy)}} = 2s-2x$

$$\frac{9x+6xxyy+y^4}{xx-yy} = (2s-2x)^2\,(C)$$

Man ziehe die Gleichung B von der Gleichung C ab; so erhält man

$$\frac{4x^4-4xxyy}{xx-yy} = (2s-2x)^2-4q$$

mithin $xx = (s-x)^2-q$

$$ss-2sx = q$$

$$x = \tfrac{1}{2}s-\frac{q}{2s}.$$

Aufl. $2x = s-\frac{q}{s}$ Summe der geraden Glieder,

$2s-2x = s+\frac{q}{s}$ Summe der ungeraden.

So ist mithin die vorgelegte Aufgabe über fünf stetig geometrisch proportionirte Größen, deren Summe und die Summe ihrer Quadrate man kennt, dahin zurükgeführt, daß man fünf stetig geometrisch proportionirte Größen finde,

von welchen man die Summe der geraden und die Summe der ungeraden Glieder kennt. Welche Aufgabe als durch den 212. §. aufgelöst anzusehen ist.

Erste Anmerkung. Die Einfachheit der Ausdrücke der Summe der geroden und der Summe der ungeraden Glieder, muß uns veranlassen, eine lichtvollere und auf eine evidentere Art mit den Eigenschaften der Progressionen zusammenhängende Entwiklung derselben zu suchen.

Es seyen A, B, C, D, E fünf Größen in geometrischer Progression. Man hat folgende Säze:

$$1^{\circ}.\ (A+B+C+D+E)(A-B+C-D+E) = A^2+B^2+C^2+D^2+E^2.$$

In der That ist

$$\begin{aligned}(A+B+C+D+E)(A-B+C-D+E) &= A^2-AB+AC-AD+AE\\ &\quad +BA-BB+BC-BD+BE\\ &\quad +CA-CB+CC-CD+CE\\ &\quad +DA-DB+DC-DD+DE\\ &\quad +EA-EB+EC-ED+EE\\ &= A^2+B^2+C^2+D^2+E^2\end{aligned}$$

weil $AC = B^2$
und $EC = D^2$.

2°. Zieht man diese Gleichung von der Gleichung

$$(A+B+C+D+E)(A+B+C+D+E) = (A+B+C+D+E)^2$$

ab, und addirt sie zu ihr; so erhält man

$$2(A+B+C+D+E)(B+D) = (A+B+C+D+E)^2 - (A^2+B^2+C^2+D^2+E^2)$$

$$2(A+B+C+D+E)(A+C+E) = (A+B+C+D+E)^2 + (A^2+B^2+C^2+D^2+E^2).$$

Zusaz. Da $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2=(A+B+C+D+E)(A-B+C-D+E)$; so lassen sich, wenn $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2$ und $A-B+C-D+E$ gegeben sind, $A+B+C+D+E$, und hieraus die beyden Summen $A+C+E$ und $B+D$ bestimmen.

Zweyte Anmerkung. Der in 1°. enthaltene Saz ist allgemein und auf jedwede ungerade Anzahl von Gliedern einer geometrischen Progression anwendbar. In jeder aus einer ungeraden Anzahl von Gliedern bestehenden geometrischen Progression nämlich ist die Summe ihrer Quadrate gleich dem Produkt ihrer Summe durch den Ueberschuß der Summe der ungeraden Glieder über die Summe der geraden.

Beyspiel. Es seyen A, B, C, D, E, F, G sieben Grösen in geometrischer Progression: Ich behaupte, daß

$$(A+B+C+D+E+F+G)(A-B+C-D+E-F+G)$$
$$=A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2+G^2.$$

Zr. der That ist das erste Produkt

$$\begin{aligned}
&AA-AB+AC-AD+AE-AF+AG\\
&+BA-BB+BC-BD+BE-BF+BG\\
&+CA-CB+CC-CD+CE-CF+CG\\
&+DA-DB+DC-DD+DE-DF+DG\\
&+EA-EB+EC-ED+EE-EF+EG\\
&+FA-FB+FC-FD+FE-FF+FG\\
&+GA-GB+GC-GD+GE-GF+GG\\
=\ &AA\quad +BB\quad +CC\quad +DD\quad +EE\quad +FF\quad +GG
\end{aligned}$$

weil $AC=BB$, $EC=DD$, $EG=FF$.

Dieser Beweis ist auf jede Anzahl von Gliedern anwendbar; aber man kann den Saz auch durch die Formeln der Summen geometrischer Progressionen auf folgende Art beweisen.

Es seyen x, y, $\frac{y^2}{x}$, $\frac{y^3}{x^2}$, $\frac{y^4}{x^3}$ .... $\frac{y^{2n}}{x^{2n-1}}$; $2n+1$ Glieder einer geometrischen Progression.

So ist $x+y+\frac{y^2}{x}+\frac{y^3}{x^2}+\frac{y^4}{x^3}+\ldots+\frac{y^n}{x^{2n-1}} = x\times\frac{y^{2n+1}-x^{2n+1}}{x^{2n}(y-x)}$

$x-y+\frac{y^2}{x}-\frac{y^3}{x^2}+\frac{y^4}{x^3}-\ldots+\frac{y^{2n}}{x^{2n-1}} = x\times\frac{y^{2n+1}+x^{2n+1}}{x^{2n}(y+x)}$

folglich

$$\left(x+y+\frac{y^2}{x}+\frac{y^3}{x^2}+\frac{y^4}{x^3}+\ldots+\frac{y^{2n}}{x^{2n-1}}\right)\times\left(x-y+\frac{y^2}{x}-\frac{y^3}{x^2}+\frac{y^4}{x^3}-\ldots+\frac{y^{2n}}{x^{2n-1}}\right)$$

$$= xx\times\frac{y^{4n+2}-x^{4n+2}}{x^{4n}(yy-xx)}$$

$$= x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2}+\frac{y^6}{x^4}+\frac{y^8}{x^6}+\ldots+\frac{y^{4n}}{x^{4n-2}}$$

§. 216.

Aufgabe. Eine abnehmende geometrische Progression finden, indem man die Grenze der Summe ihrer Glieder und die Grenze der Summe der Quadrate derselben kennt.

Diese gegebene Grenzen seyen beziehungsweise s und q.

Ben. Es sey x das erste Glied der Progression,
r der Exponent des Verhältnisses zweyer auf einander folgenden Glieder,

so ist

die Grenze der Summe der Glieder der Progression $x\times\frac{1}{1-r}$

die Grenze der Summe der Quadrate $xx\times\frac{1}{1-rr}$

Bed. $$\begin{cases} x\times\frac{1}{1-r} = s\ (A) \\ xx\times\frac{1}{1-rr} = q\ (B) \end{cases}$$

Red. Man dividire die Glieder der Gleichung B durch die Glieder der Gleichung A; so erhält man

$$x\times\frac{1}{1+r} = \frac{q}{s}\ (C).$$

Daher $\frac{r}{1-r} : \frac{r}{1+r} = s : \frac{q}{s}$

oder $1+r : 1-r = s : \frac{q}{s}$

$$1 : r = s+\frac{q}{s} : s-\frac{q}{s}$$

$$r = \frac{s-\frac{q}{s}}{s+\frac{q}{s}} = \frac{ss-q}{ss+q}$$

$$1-r = \frac{2q}{ss+q}$$

$$x = s(1-r) = \frac{2qs}{ss+q}$$

Aufl. $x = \frac{2qs}{ss+q}$; $r = \frac{ss-q}{ss+q}$

$$1-r = \frac{2q}{ss+q}, \quad 1+r = \frac{2ss}{ss+q}, \quad 1-rr = \frac{4qss}{(ss+q)^2}$$

Probe. $\begin{cases} 1°. \ \frac{2qs}{ss+q} : \frac{2q}{ss+q} = s \\ 2°. \ \frac{4qqss}{(ss+q)^2} : \frac{4qss}{(ss+q)^2} = q \end{cases}$

Beyspiele. 1°. Es sey $\begin{matrix} s=2 \\ q=\frac{4}{3} \end{matrix}$ So ist $x = \frac{\frac{16}{3}}{4+\frac{4}{5}}$

$$= \frac{16}{16} = 1$$

$$r = \frac{4-\frac{4}{3}}{4+\frac{4}{3}} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Progression $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \cdots$

2°. Es sey $\begin{matrix} s=9 \\ q=40\frac{1}{2} \end{matrix}$ So ist $x = \frac{729}{81+40\frac{1}{2}} = 6$

$$r = \frac{81-40\frac{1}{2}}{81+40\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Progression $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9} \cdots$

Anmerkung. Die allgemeine Aufgabe: Eine aus einer gegebenen Anzahl von Gliedern bestehende geometrische Progression finden, indem man die Summe dieser Glieder und die Summe ihrer Quadrate kennt, ist immer eine bestimmte Aufgabe, welche die wirklichen Kräften der Analyse übersteigt, sobald die Anzahl der Glieder größer ist als fünf. Wenn man mithin blos die Summe der Glieder und die Summe ihrer Quadrate kennt, so ist die Aufgabe unbestimmt. Jedoch wenn von der Aufgabe eine Auflösung in keinen andern, als in ganzen Zahlen sowohl für die Anzahl der Glieder, (welches eine wesentliche Bedingung ist) als für jedes Glied möglich ist; so läßt sich diese Auflösung auf folgende Art finden.

Es sey die Progression

$$x+rx+r^2x+r^3x+r^4x+\ldots+r^{n-1}x=x\times\frac{r^n-1}{r-1}=s$$

und $x^2+r^2x^2+r^4x^2+r^6x^2+r^8x^2+\ldots+r^{n-2}x^2=x^2\times\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}=q$

So erhält man $x^2\times\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}:x\times\frac{r^n-1}{r-1}=q:s$

oder $x\times\frac{r^{n+1}}{r+1}=\frac{q}{s}$

daher $x\times\frac{r^n-1}{r-1}+x\times\frac{r^n+1}{r+1}=2x\times\frac{r^{n+1}-1}{(r-1)(r+1)}=s+\frac{q}{s}$

$$x\times\frac{r^n-1}{r-1}-x\times\frac{r^n+1}{r+1}=2x\times\frac{r^n-r}{(r-1)(r+1)}=s-\frac{q}{s}$$

Daher $\frac{s+\frac{q}{s}}{s-\frac{q}{s}}=\frac{2r^{n+1}-2}{2r^n-2r}=\frac{2r^{n+1}-2rr+2rr-2}{2r^n-2r}$

$$=r+\frac{2rr-2}{rr-1}$$

$$=r+x\times\frac{2rr-2}{rr-1}$$

$$x\times\frac{2r^n-2r}{rr-1}$$

$$= r + \frac{2x}{x \times \frac{2r^n - 2r}{rr - 1}} = r + \frac{2x}{s - \frac{q}{s}}$$

Demnach hat man für die Auflösung der Aufgabe in ganzen Zahlen folgende Regel:

Man dividire die gegebene Summe der Quadrate durch die Summe der Glieder. Den Quotienten addire man zur Summe der Glieder und ziehe ihn davon ab. Die Summe, welche diese Addition gibt, dividire man durch den Rest, welchen die Subtraction gibt. Der nächst kleinere Quotient ist der Exponent des Verhältnisses zweyer auf einander folgenden Glieder, und der Rest ist das Doppelte des ersten Glieds.

Erstes Beyspiel. Es sey $s = 7$

$q = 21$

$\frac{q}{s} = 3$; $s + \frac{q}{3} = 10$, $s - \frac{q}{3} = 4$;

$$\frac{s + \frac{q}{3}}{s - \frac{q}{3}} = \frac{10}{4} = 2 + \frac{2}{4}.$$

Folglich ist der Exponent der Progression 2; das Doppelte des ersten Glieds ist auch 2, und das erste Glied ist 1.

Progression . . 1, 2, 4.

Zweytes Beyspiel. Es sey $s = 40$

$q = 820$

$\frac{q}{s} = 20\frac{1}{2}$; $s + \frac{q}{s} = 60\frac{1}{2}$, $s - \frac{q}{s} = 19\frac{1}{2}$;

$$\frac{s + \frac{q}{s}}{s - \frac{q}{s}} = 3 + \frac{2}{19\frac{1}{2}}$$

Folglich ist der Exponent der Progression 3; das Doppelte des ersten Glieds ist 2, und das erste Glied ist 1.

Progression . . 1, 3, 9, 27.

§. 217.

Aufgabe. Man verlangt eine geometrische Progression, von welcher man die Summe der Glieder, die Summe ihrer Quadrate und die Summe ihrer Würfel kennt.

Es seyen s', s'', s''' die gegebenen Summen der Glieder, ihrer Quadrate und ihrer Würfel.

Ben. Erstes Glied x
Exponent der Progression . . . . r
Anzahl der Glieder . . . . . n
Summe der Glieder . . . . $x \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$
Summe der Quadrate . . . . $xx \times \frac{r^{2n} - 1}{r^2 - 1}$
Summe der Würfel . . . . $x^3 \times \frac{r^{3n} - 1}{r^3 - 1}$

Bed.
$$\begin{cases} x \times \frac{r^n - 1}{r - 1} = s' \ (A') \\ xx \times \frac{r^{2n} - 1}{r^2 - 1} = s'' \ (A'') \\ x^3 \times \frac{r^{3n} - 1}{r^3 - 1} = s''' \ (A''') \end{cases}$$

Man dividire die Glieder der Gleichung A'' durch die Glieder der Gleichung A'; man erhält

$$x \times \frac{r^n + 1}{r + 1} = \frac{s''}{s'} \ (B)$$

Man dividire die Glieder der Gleichung A''' durch die Glieder der Gleichung A'; man erhält

$$xx \times \frac{r^{2n} + r^n + 1}{rr + r + 1} = \frac{s'''}{s'} \ (C)$$

Da nun $x \times \frac{r^n - 1}{r - 1} = s' \ (A')$

und $x \times \frac{r^n + 1}{r + 1} = \frac{s''}{s'} \ (B)$;

$$\text{ſo iſt } r^n - 1 = s' \times \frac{r-1}{x}$$

$$r^n + 1 = \frac{s''}{s'} \times \frac{r+1}{x}$$

$$\text{folglich } 2r^n = s' \times \frac{r-1}{x} + \frac{s''}{s'} \times \frac{r+1}{x}$$

$$2 = \frac{s''}{s'} \times \frac{r+1}{x}$$

$$2x = \frac{s''}{s'}(r+1) - s'(r-1)$$

$$xx \times \frac{s'^2 \times \frac{(r-1)^2}{4xx} + 2s'' \times \frac{(r-1)(r+1)}{4xx} + \frac{s''^2}{s'^2} \times \frac{(r+1)^2}{xx} + s' \times \frac{r-1}{2x} + \frac{s''}{s'} \times \frac{r+1}{2x} + 1}{rr+r+1} = \frac{s'''}{s'}$$

$$\frac{s'^2(r-1)^2 + 2s''(r-1)(r+1) + \frac{s''^2}{s'^2} \times (r+1)^2 + 2s'(r-1)x + \frac{2s''}{s'}(r+1)x + 4xx}{4(rr+r+1)} = \frac{s'''}{s'}$$

$$\frac{2s'^2(r-1)^2 + 2\frac{s''^2}{s'^2}(r+1)^2 + \frac{s''^2}{s'^2}(r+1)^2 - s'^2(r-1)^2}{4(rr+r+1)} = \frac{s''''}{s'}$$

$$\frac{s'^2(r-1)^2 + 3 \cdot \frac{s''^2}{s'^2}(r+1)^2}{4(rr+r+1)} = \frac{s'''}{s'}$$

Daher

$$rr\left(s'^2 + 3\frac{s''^2}{s'^2} - 4\frac{s'''}{s'}\right) - 2r\left(s'^2 - 3\frac{s''^2}{s'^2} + 2\frac{s'''}{s'}\right) + \left(s'^2 + 3\frac{s''^2}{s'^2} - 4\frac{s'''}{s'}\right) = 0$$

$$rr - 2r \times \frac{s'^2 - 3\frac{s''^2}{s'^2} + 2\frac{s'''}{s'}}{s'^2 + 3\frac{s''^2}{s'^2} - 4\frac{s'''}{s'}} + 1 = 0$$

Folglich wird r durch eine Gleichung vom zweyten Grad beſtimmt.

Man erhält sodenn x durch die Gleichung

$$2x = \frac{s''}{s'}(r+1) - s'(r-1)$$

Endlich erhält man n durch die Gleichung

$$2r^n = s' \times \frac{r-1}{x} + \frac{s''}{s'} \times \frac{r+1}{x}$$

Erstes Beyspiel. Es sey $s' = 31$

$s'' = 341$

$s''' = 4681$

$$rr - 2r \times \frac{961 - 3.121 + 2.151}{961 + 3.121 - 4.151} + 1 = 0$$

$$rr - 2r \times \frac{900}{720} + 1 = 0$$

$$rr - 2r \times \frac{5}{4} + 1 = 0$$

$$rr - 2r \times \frac{5}{4} + \frac{25}{16} = \frac{9}{16}$$

$$r = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$r+1 = \begin{matrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{matrix}; \quad r-1 = \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$2x = 11 \times \begin{matrix} 3 - 31 \\ \frac{3}{2} + 15\frac{1}{2} \end{matrix} = \begin{matrix} 2 \\ 32 \end{matrix}$$

$$x = \begin{matrix} 1 \\ 16 \end{matrix}$$

Progression 1, 2, 4, 8, 16

oder 16, 8, 4, 2, 1

Zweyter Theil.

Ueber die Summation der Reyhen,

welche durch Produkte von Gliedern einer geometrischen Progression und von Gliedern der Reyhen der figurirten Zahlen gebildet werden.

§. 218.

Es sey eine geometrische Progression

$$1,\ p,\ p^2,\ p^3,\ p^4,\ p^5 \ldots p^{n-1}$$

und die Reyhe der natürlichen Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \ldots n$$

Man multiplicire die correspondirenden Glieder dieser beyden Reyhen in einander; so erhält man die Reyhe

$$1,\ 2p,\ 3p^2,\ 4p^3,\ 5p^4,\ 6p^5 \ldots np^{n-1}$$

Man verlangt die Summe s' einer gegebenen Anzahl n von Gliedern der lezten Reyhe.

Es sey s die Summe ebenso vieler Glieder der geometrischen Progression.

$$\text{Da } s' = 1+2p+3p^2+4p^3+5p^4+6p^5+\ldots+np^{n-1}$$

$$\text{so ist } ps' = \quad p+2p^2+3p^3+4p^4+5p^5+\ldots+(n-1)p^{n-1}+np^n$$

Erster Fall. Es sey $p > 1$; so ist

$$s'(p-1) = -(1+p+p^2+p^3+p^4+p^5+\ldots+p^{n-1})+np^n$$

$$= np^n - s$$

$$s' = n\times\frac{p^n}{p-1} - \frac{s}{p-1} = n\times\frac{p^n}{p-1} - \frac{p^n-1}{(p-1)^2}$$

$$= n\times\frac{p^n}{p-1} - \frac{p^n}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^2}$$

Der Zähler p^n der Brüche $n\times\frac{p^n}{p-1}$, $\frac{p^n}{(p-1)^2}$ wird desto

desto grösser, je grösser man die Anzahl der Glieder nimmt, und die Grösse der vorgegebenen Summe hat keine Grenze.

Zweyter Fall. Es sey $p < 1$; so ist

$$s'(1-p) = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + \ldots + p^{n-1} - np^n$$
$$= s - np^n$$

$$s' = \frac{s}{1-p} - n\frac{p^n}{1-p} = \frac{1-p^n}{(1-p)^2} - n \times \frac{p^n}{1-p}$$
$$= \frac{1}{(1-p)^2} - \frac{p^n}{(1-p)^2} - n \times \frac{p^n}{1-p}$$

Der Zähler p^n der Brüche $\frac{p^n}{(1-p)^2}$, $n \times \frac{p^n}{1-p}$ nimmt desto schneller ab, je grösser man die Anzahl der Glieder nimmt, so daß es keine Grenze für die Abnahme dieses Zählers gibt. Folglich ist die Grösse $\frac{1}{(1-p)^2}$ die Grenze der Werth der Summe der vorgelegten Reyhe. Diese Summe nähert sich nämlich dem Werth $\frac{1}{(1-p)^2}$ desto mehr, je eine grössere Anzahl von Gliedern man nimmt, und sie kann von demselben um weniger als um irgend eine gegebene Grösse unterschieden werden.

Wenn man den Bruch $\frac{1}{(1-p)^2}$ oder $(1-p)^{-2}$ vermittelst des binomischen Lehrsazes in eine Reyhe entwikkelt; so erhält man die Reyhe

$$1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + 5p^4 + \ldots$$

Aber die Summe der entwickelten Glieder nähert sich dem zu entwickelnden Bruch $\frac{1}{(1-p)^2}$ immer mehr nur, wenn $p < 1$. Im entgegengesezten Fall entfernt sich die Summe der entwickelten Glieder von der zu entwickelnden Grösse $\frac{1}{(1-p)^2}$ desto mehr, je mehr man Glieder entwickelt, indem die Grösse $\frac{p^n}{(1-p)^2} + n \cdot \frac{p^n}{1-p}$ desto grösser ist, je grösser n ist. In diesem

Fall hat man die Entwiklung mit der Größe

$$\frac{1}{(p-1)^2} = (p-1)^{-2} = \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^3} + \frac{3}{p^4} + \frac{4}{p^5} + \ldots$$

vorzunehmen.

Dritter Fall. Wenn $p = 1$.

Hier scheint es, daß man aus keiner von den beyden sich auf die beyden ersten Fälle beziehenden Gleichungen

$$s'(p-1) = np^n - s$$
$$s'(1-p) = s - np^n$$

etwas schliessen könne. In der That, wenn man $p = 1$ sezt, so wird $s = n$; man hat mithin $s'(1-1) = n-n$, woraus man nichts schliessen kann. Inzwischen ist in diesem Fall

$$s' = 1+2+3+4+5+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{1.2}$$

Es fragt sich nun, wie man diesen Werth von s' aus seinem Ausdruk in einem der beyden andern Fälle, z. B. im zweyten schliessen könne, wo man hat $s' = \frac{1}{(1-p)^2} - \frac{p^n}{(1-p)^2} - n \cdot \frac{p^n}{1-p}$

Zu diesem Endzwek seze man $1-p = z$, und mithin $p = 1-z$; so erhält man

$$s' = \frac{1}{zz} - \frac{(1-z)^n}{zz} - \frac{n(1-z)^n}{z}$$

$$= \frac{1}{zz} - \frac{1 - \frac{n}{1}z + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}z^2 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-2}{3}z^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{4}z^4 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-4}{5}z^5 + \ldots}{zz}$$

$$- n \times \frac{1 - \frac{n}{1}z + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}z^2 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-2}{3}z^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{4}z^4 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-4}{5}z^5 + \ldots}{z}$$

$$= \frac{\frac{n}{1} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}z + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-2}{3}z^2 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{4}z^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-4}{5}z^4 - \ldots}{z}$$

$$- \frac{n - n\cdot\frac{n}{1}z + n\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}z^2 - n\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-2}{3}z^3 + n\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{4}z^4 - \ldots}{z}$$

$$=n\left(\frac{n}{1}-\frac{n-1}{2}\right)-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\left(n-\frac{n-2}{3}\right)z+\frac{n}{1}\cdot\cdot\frac{n-2}{3}\left(n-\frac{n-3}{4}\right)z^2-\frac{n}{1}\cdot\cdot\frac{n-3}{4}$$
$$\left(n-\frac{n-4}{5}\right)z^3+\cdots$$

$$=\frac{(n+1)n}{1.2}-2\cdot\frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}z+3\cdot\frac{n+1\ldots n-2}{1.2.3.4}z^2-4\cdot\frac{n+1\ldots n-3}{1\ldots5}z^3+\ldots$$

in allen Fällen.

Nun sey $z=0$, oder $p=1$. So erhält man $s'=\frac{n(n+1)}{1.2}$

Statt der geometrischen Progression, deren erste Glieder 1 und p sind, habe man nun eine aus den nämlichen Gliedern bestehende Reyhe, vor denen abwechslungsweise die Zeichen der Addition und Subtraction vorhergehen. Und es sey

$$\Sigma'=1-2p+3p^2-4p^3+5p^4-6p^5+\ldots\ldots\pm np^{n-1}$$
$$p\Sigma'=\quad p-2p^2+3p^3-4p^4+5p^5-\ldots\ldots\mp(n-1)p^{n-1}\pm np^n$$

$$\Sigma'(p+1)$$
$$=1-p+p^2-p^3+p^4-p^5+\ldots\ldots\mp p^{n-1}\pm np^n$$
$$=\Sigma\pm np^n=\frac{1\pm p^n}{1+p}\pm n\times p^n$$
$$\Sigma'=\frac{1'\pm p^n}{(1+p)^2}\pm n\frac{p^n}{1+p}$$
$$=\frac{1}{(1+p)^2}\pm\frac{p^n}{(1+p)^2}\pm n\frac{p^n}{1+p}.$$

Erster Fall. Es sey $p>1$. So entfernt sich der Ausdruk von Σ' abwechslungsweise als größer und als kleiner von der Größe $\frac{1}{(1+p)^2}$ desto mehr, je mehr man Glieder entwickelt.

Zweyter Fall. Es sey $p<1$. So ist die Grenze des Werths von $\Sigma'\ldots\frac{1}{(1+p)^2}$; und wenn man $\frac{1}{(1+p)^2}=(1+p)^{-2}$ nach dem binomischen Lehrsaz entwickelt; so erhält man $1-2p+3p^2-4p^3+5p^4-6p^5+\ldots$

Dritter Fall. Es sey $p=1$. Ist die Anzahl der Glieder ungerade, so ist der Werth von $\Sigma' .. \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{n}{2} = \frac{n+1}{2}$. Ist die Anzahl der Glieder gerade, so ist der Werth von $\Sigma' .. \frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{n}{2} = -\frac{n}{2}$.

Die Größe $\frac{1}{(1+p)^2}$ oder $\frac{1}{4}$ kann in diesem Fall nicht die Grenze von Σ' heissen, da der Werth von Σ' sich von $\frac{1}{4}$, der mittlern Proportionalgröße zwischen $\frac{n}{2}$ und $-\frac{n}{2}$, abwechslungsweise als größer und kleiner, desto mehr entfernt, je mehr man Glieder nimmt. Es ist ungereimt zu sagen, daß $1-2+3-4+5-6+7\ldots = \frac{1}{4}$ sey; und die Reyhe $1-2p+3p^2-4p^3+5p^4-6p^5+\ldots$, ob sie gleich durch die Entwiklung $(1+p)^{-2}$ entstanden ist, nähert sich doch dieser leztern Größe mit Entwiklung einer größern Anzahl von Gliedern nur in dem Fall immer mehr, wenn $p<1$ ist.

Was über die Reyhe der natürlichen Zahlen gesagt worden ist, läßt sich auf jede arithmetische Progression anwenden.

Es sey $p' =$

$$a+p(a+d)+p^2(a+2d)+p^3(a+3d)+p^4(a+4d)+\ldots +p^{n-1}(a+(n-1)d)$$

$$= a\,(1+p+p^2+p^3+p^4+\ldots+p^{n-1}) + pd(1+2p+3p^2+4p^3+5p^4+\ldots+(n-1)p^{n-2}$$

$$= a\times\frac{1-p^n}{1-p}+pd\left(\frac{1}{(1-p)^2}-\frac{p^{n-1}}{(1-p)^2}-(n-1)\times\frac{p^{n-1}}{1-p}\right)$$

Beyspiel. Es sey $a=1$

$d=2$.

So ist $1+3p+5p^2+7p^3+\ldots+(2n-1)p^{n-1}$

$$=\frac{1-p^n}{1-p}+2p\left(\frac{1}{(1-p)^2}-\frac{p^{n-1}}{(1-p)^2}-(n-1)\frac{p^{n-1}}{1-p}\right).$$

Es sey $p=1$; so muß man $1+3+5+7+9+\ldots+2n-1=nn$ erhalten. Dis erhält man wirklich durch das

nämliche Verfahren, wodurch man den Werth von s' in diesem Fall bestimmt hat. Man findet allgemein, daß der dem Fall $p=1$ entsprechende Werth von $P' \ldots na + d \times \frac{n(n-1)}{1.2}$ ist.

Man verändere das Zeichen von p; so erhält man

$$\Pi' = a - p(a+d) + p^2(a+2d) - p^3(a+3d) + p^4(a+4d) - \ldots \pm p^{n-1}(a+(n-1)d)$$
$$= a(1 - p + p^2 - p^3 + p^4 \ldots \pm p^{n-1})$$
$$- pd(1 - 2p + 3p^2 - 4p^3 + 5p^4 \ldots \pm (n-1)p^{n-2})$$
$$= a \times \frac{1 \pm p^n}{1+p} - pd\left(\frac{1}{(1+p)^2} \mp \frac{p^{n-1}}{(1+p)^2} \mp (n-1)\frac{p^{n-1}}{1+p}\right).$$

§. 219.

Es sey die Reyhe der figurirten Zahlen der zweyten Ordnung der der Triangularzahlen

$$1, 3, 6, 10, 15, 21 \ldots \frac{n(n+1)}{1.2},$$

deren Glieder man beziehungsweise durch die Glieder einer geometrischen Progression, deren erste Glieder 1 und p sind, multiplicire; und es sey s'' die Summe der durch diese Producte gebildeten Reyhe.

$$s'' = 1 + 3p + 6p^2 + 10p^3 + 15p^4 + \ldots + \frac{n(n+1)}{1.2}p^{n-1}$$
$$ps'' = \quad p + 3p^2 + 6p^3 + 10p^4 + \ldots + \frac{(n-1)n}{1.2}p^{n-1} + \frac{n(n+1)}{1.2}p^n$$

Erster Fall. Es sey $p > 1$. So ist

$$s''(p-1) = \frac{n(n+1)}{1.2}p^n - (1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + 5p^4 + \ldots + np^{n-1})$$
$$= \frac{n(n+1)}{1.2}p^n - s'$$
$$= \frac{n(n+1)}{1.2}p^n - \left(n \cdot \frac{p^n}{p-1} \cdot \frac{p^n}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^2}\right)$$
$$s'' = \frac{n(n+1)}{1.2} \times \frac{p^n}{p-1} - \left(n \cdot \frac{p^n}{(p-1)^2} \cdot \frac{p^n}{(p-1)^3} + \frac{1}{(p-1)^3}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)}{1.2} \times \frac{p^n}{p-1} - n \cdot \frac{p^n}{(p-1)^2} + \frac{p^n}{(p-1)^3} - \frac{1}{(p-1)^3}$$

Zweyter Fall. Es sey $p < 1$. Aus der Gleichung

$$s''(1-p) = 1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + 5p^4 + \ldots + np^{n-1} - \frac{n(n+1)}{1.2}p^n$$

$$= s' - \frac{n(n+1)}{1.2}p^n$$

$$= \frac{1}{(1-p)^2} - \frac{p^n}{(1-p)^2} - n \cdot \frac{p^n}{1-p} - \frac{n(n+1)}{1.2}p^n$$

erhält man $s'' = \frac{1}{(1-p)^3} - \frac{p^n}{(1-p)^3} - n \cdot \frac{p^n}{(1-p)^2} - \frac{n(n+1)}{1.2} \cdot \frac{p^n}{1-p}$

Dritter Fall. Es sey $p = 1$.

Aus den sich auf die beyden ersten Fälle beziehenden Gleichungen $s''(p-1) = \frac{n(n+1)}{1.2}p^n - s'$

$$s''(1-p) = s' - \frac{n(n+1)}{1.2}p^n = \infty$$

scheint man hier nichts schliessen zu können, indem $s' = \frac{n(n+1)}{1.2}$; und man hat $s''(1-1) = \frac{n(n+1)}{1.2} \cdot \frac{n(n+1)}{1.2}$; $s'' \times 0 = 0$.

Um den Werth von s'' in diesem Fall zu erhalten, verfährt man ebenso wie man, um den Werth von s' zu bestimmen, verfahren ist.

Man nehme z. B. die Formel für den zweyten Fall

$$s'' = \frac{1}{(1-p)^3} - \frac{p^n}{(1-p)^3} - n \cdot \frac{p^n}{(1-p)^2} \cdot \frac{n(n+1)}{1.2} \cdot \frac{p^n}{1-p}.$$

Man setze $1-p = z$, $p = 1-z$. So wird

$$s' = \frac{1}{z^3} - \frac{1 - \frac{n}{1}z + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}z^2 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-2}{3}z^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{4}z^4 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-4}{5}z^5 + \ldots}{z^3}$$

$$- n \times \frac{1 - \frac{n}{1}z + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}z^2 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-2}{3}z^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{4}z^4 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-4}{5}z^5 + \ldots}{zz}$$

$$- \frac{n(n+1)}{1.2} \times \frac{1 - \frac{n}{1}z + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}z^2 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-2}{1}z^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{4}z^4 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-4}{5}z^5 + \ldots}{z}$$

$$= \frac{\frac{n}{1} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}z + \frac{n}{1}\cdot\cdot\frac{n-2}{3}z^2 - \frac{n}{1}\cdot\cdot\frac{n-3}{4}z^3 + \frac{n}{1}\cdot\cdot\frac{n-4}{5}z^4 - \cdots}{z^z}$$

$$- \frac{n - n\cdot\frac{n}{1}z + n\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}z^2 - n\cdot\frac{n}{1}\cdot\cdot\frac{n-2}{3}z^3 + n\cdot\frac{n}{1}\cdot\cdot\frac{n-3}{4}z^4 - \cdots}{z^z}$$

$$- \frac{n(n+1)}{1.2} \times \frac{1 - \frac{n}{1}z + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}z^2 - \frac{n}{1}\cdot\cdot\frac{n-2}{3}z^3 + \frac{n}{1}\cdot\cdot\frac{n-3}{4}z^4 - \cdots}{z}$$

$$= \frac{\frac{n(n+1)}{1.2} - 2\cdot\frac{(n+1)n.(n-1)}{1.2.3}z + 3\cdot\frac{(n+1)\ldots(n-2)}{1\ldots4}z^2 - 4\frac{(n+1)\ldots(n-3)}{1\ldots5}z^3 + \cdots}{z}$$

$$= \frac{\frac{n(n+1)}{1.2} - \frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{n}{1}z + \frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2}z^2 - \frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}z^3 + \cdots}{z}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3} - 3\cdot\frac{(n+2)\ldots(n-1)}{1\ldots4}z + 6\frac{(n+2)\ldots(n-2)}{1\ldots5}z^2 - \cdots$$

Aus dieser leztern allgemeinen Gleichung des Werths von s'' schließt man den dem Fall $p = 1$, $z = 0$ entsprechenden Werth $\frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3}$; welches der Ausdruk für die Summe der Reyhe $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots + \frac{n(n+1)}{1.2}$ ist.

Anmerkung. Die Größe $\frac{1}{(1-p)^3} = (1-p)^{-3}$ ist die Grenze der vorgelegten Reyhe nur wenn $p < 1$. Wenn $p > 1$; so entfernt sich der Werth der Reyhe von dieser Größe um so mehr, je mehr man Glieder entwickelt.

Zweyte Anmerkung. Man verändere das Zeichen von p; so erhält man

$$\Sigma^n = 1 - 3p + 6p^2 - 10p^3 + 15p^4 - 21p^5 \ldots\ldots \pm \frac{n(n+1)}{1.2}p^{n-1}$$

$$= \frac{1}{(1+p)^3} \pm \frac{p^n}{(1+p)^3} \pm n\cdot\frac{p^n}{(1+p)^2} \pm n(n+1)\times\frac{p^n}{1+p}$$

Es sey $p < 1$; so ist $\frac{1}{(1+p)^3} = (1+p)^{-3}$ die Grenze der Reyhe $1 - 3p + 6p^2 - 10p^3 + 15p^4 \ldots\ldots$

Es sey $p=1$; so ist $1-3+6-10+15-21\ldots\pm\frac{n(n+1)}{1.2}$

$$=\frac{1}{2^3}\pm\frac{1}{2^3}\pm\frac{n}{2^2}\pm\frac{n(n+1)}{1.2}$$

$$=\frac{(n+1)}{2^2}+\frac{n(n+1)}{1.2}\text{ oder }-\left(\frac{n}{2^2}+\frac{n(n+1)}{1.2}\right)$$

Die mittlere arithmetische Proportionalgröße zwischen diesen beyden Werthen ist $+\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$. Aber man kann nicht sagen, daß der Werth der Progression $1-3+6-10+15-21+\ldots$, $\frac{1}{8}$ sey.

Anwendung. Was über die Reyhe der Triangularzahlen gesagt worden ist, läßt sich auf alle Reyhen der zweyten Ordnung anwenden, deren zweyte Differenzen beständig sind.

Es sey eine Reyhe der zweyten Ordnung

$a,\ a+b,\ a+2b+c,\ a+3b+3c,\ a+4b+6c,\ a+5b+10c,$

$a+6b+15c\ldots\ldots a+(n-1)b+\frac{(n-2)(n-1)}{1.2}c$

und es sey

$$P^n=a+(a+b)p+(a+2b+c)p^2+(a+3b+3c)p^3+$$
$$(a+4b+6c)p^4+\ldots\ldots+\left(a+(n-1)b+\frac{(n-2)(n-1)}{1.2}c\right)p^{n-1}$$

Man hat

$$P''=a(1+p+p^2+p^3+p^4+\ldots\ldots+p^{n-1})$$
$$+bp(1+2p+3p^2+4p^3+5p^4+\ldots\ldots+(n-1)p^{n-2})$$
$$+cp^2(1+3p+6p^2+10p^3+15p^4+\ldots\ldots+\frac{(n-2)(n-1)}{1.2}p^{n-3})$$

Folglich reducirt sich die Summation der vorliegenden Reyhe auf die Summationen der aus figurirten Zahlen und Gliedern einer geometrischen Progression zusammengesezten Reyhen; welche man schon erhalten hat.

§. 220.

Die Reyhe, durch deren Glieder man die Glieder einer

geometrischen Progression multiplicirt, sey die Reyhe der Pyramidalzahlen oder der figurirten Zahlen der dritten Ordnung $1, 4, 10, 20, 35 \ldots \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$

Es sey $s''' =$

$$1+4p+10p^2+20p^3+35p^4+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}p^{n-1}$$

folglich $s'''p =$

$$p+4p^2+10p^3+20p^4+\ldots+\frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3}p^{n-1}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}p^n$$

Erster Fall. Es sey $p > 1$. So ist

$$s'''(p-1)=-(1+3p+6p^2+10p^3+15p^4+\ldots+\frac{n(n+1)}{1.2}p^{n-2})+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}p^n$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}p^n - s''$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}p^n - \frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{p^n}{p-1}+n\cdot\frac{p^n}{(p-1)^2}-\frac{p^n}{(p-1)^3}+\frac{1}{(p-1)^3}$$

$$s''' = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\times\frac{p^n}{p-1}-\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{p^n}{(p-1)^2}+n\cdot\frac{p^n}{(p-1)^3}-\frac{p^n}{(p-1)^4}+\frac{1}{(p-1)^4}$$

Zweyter Fall. Es sey $p < 1$. Man hat ebenfalls

$$s''' = \frac{1}{(1-p)^4}-\frac{p^n}{(1-p)^4}-n\cdot\frac{p^n}{(1-p)^3}-\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{p^n}{(1-p)^2}-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\frac{p^n}{1-p}$$

Dritter Fall. Es sey $p=1$. Es sey allgemein $1-p=z$, oder $p=1-z$. Wir haben gefunden

$$s^n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}-3\frac{(n-1)\ldots(n+2)}{1\ldots4}z+6\frac{(n-2)\ldots(n+2)}{1\ldots5}z^2-\ldots$$

und $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}p^n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\left(1-\frac{n}{1}z+\frac{n(n-1)}{1.2}z^2-\ldots\right)$

folgl. $s'''z = \frac{n\ldots(n+3)}{1\ldots4}z-4\cdot\frac{(n-1)\ldots(n+3)}{1\ldots5}z^2+10\frac{(n-2)\ldots(n+3)}{1\ldots6}z^3-\ldots$

$$s''' = \frac{n\ldots(n+3)}{1\ldots4}-4\cdot\frac{(n-1)\ldots(n+3)}{1\ldots5}z+10\frac{(n-2)\ldots(n+3)}{1\ldots6}z^3-\ldots$$

Es sey $z=0$; man erhält

$s''' = \frac{n\ldots(n+3)}{1\ldots4}$, wie dis seyn muß.

Erste Anmerkung. Die Größe $\frac{1}{(1-p)^4}$ ist die Grenze des Werths von s''' nur, wenn $p<1$; in den andern Fällen entfernt sich die Summe der entwickelten Glieder von dem Werth von $\frac{1}{(1-p)^4}$ um so mehr, je größer man die Anzahl der Glieder nimmt.

Zweyte Anmerkung. Man verändere das Zeichen von p; so erhält man

$$\Sigma''' = 1 - 4p + 10p^2 - 20p^3 + 35p^4 \ldots \pm \frac{n\ldots(n+2)}{1\ldots3} p^{n-3}$$

$$= \frac{1}{(1+p)^4} \pm \frac{p^n}{(1+p)^4} \pm n \cdot \frac{p^n}{(1+p)^3} \pm \frac{n(n+1)}{1.2} \cdot \frac{p^n}{(1+p)^2} \pm \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} \cdot \frac{p^n}{1+p}$$

je nachdem n $\begin{matrix}\text{ungerade}\\\text{gerade}\end{matrix}$ ist.

Die Größe $\frac{1}{(1+p)^4}$ ist die Grenze von Σ''' nur wenn $p<1$.

Es sey $p=1$; so ist

$$\Sigma''' = \begin{matrix}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\right)\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2^2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\right)\end{matrix}$$

für ein $\begin{matrix}\text{ungerades}\\\text{gerades}\end{matrix}$ n.

Die mittlere arithmetische Proportionalgröße zwischen diesen beyden Ausdrücken ist $\frac{1}{2^4}$; jedoch kann man nicht sagen, daß $\frac{1}{2^4}$ die Grenze der Reyhe $1-+10-20+35\ldots$ sey.

Anwendung. Man kann das, was über die figurirten Zahlen der dritten Ordnung gesagt worden ist, auf jede

Reyhe der dritten Ordnung, oder deren Differenzen der dritten Ordnung constant sind, anwenden.

Es sey eine solche Reyhe

$$a,\ a+b,\ a+2b+c,\ a+3b+3c+3d,\ a+4b+6c+4d\ldots$$
$$a+(n-1)b+\frac{(n-2)(n-1)}{1.2}c+\frac{(n-3)\ldots(n-1)}{1\ldots3}d.$$

Die Summe der Produkte der Glieder dieser Reyhe durch die Glieder der geometrischen Reyhe

$$1,\ p,\ p^2,\ p^3,\ p^4\ldots p^{n-1}$$

läßt sich in Reyhen von Produkten der Glieder dieser leztern Reyhe durch die Glieder der Reyhen der figurirten Zahlen allein zerlegen. Diese Summe ist nämlich

$$a(1+p+p^2+p^3+p^4+\ldots+p^{n-1})$$
$$+bp(1+2p+3p^2+4p^3+5p^4+\ldots+(n-1)p^{n-2})$$
$$+cp^2(1+3p+6p^2+10p^3+15p^4+\ldots+\frac{(n-2)(n-1)}{1.2}p^{n-3})$$
$$+dp^3(1+4p+10p^2+20p^3+35p^4+\ldots+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{1.2.3}p^{n-4})$$

Folglich läßt sich alles, was über diese leztern Reyhen gesagt worden ist, auf die ersten anwenden.

Die so eben entwickelten Beyspiele mögen hinreichen, um das allgemeine Verfahren zu zeigen, das man bey diesen Summationen zu befolgen hat; wie die sich auf Reyhen einer gewissen Ordnung beziehenden Fälle von den sich auf höhere Ordnungen beziehenden abhangen, und wie man die Formeln für die Fälle, da p von der Einheit verschieden ist, auf den Fall, da p der Einheit gleich ist, anwendet.

Ich werde dieses Kapitel mit einigen besondern sich auf geometrische Progressionen beziehenden Uebungen beschliessen.

§. 221.

Aufgabe. A gibt an B $\frac{1}{n}$tel dessen ab, was B besizt. B gibt an A $\frac{1}{n}$tel dessen zurük, was A behalten hat.

Am Ende haben sie beziehungsweise die Summen a und b. Man fragt, was sie anfänglich besassen?

Es sey $a+b=s$.

Durch Räsonnement. Da A die Summe a besizt, nachdem er von B $\frac{1}{n}$tel dessen, was er besaß, bekommen hat; so hatte er, ehe er dis bekam, $\frac{n}{n+1}a$, und B hatte

$$s-\frac{n}{n+1}a=s-\frac{n}{n+1}(s-b)=\frac{n}{n+1}b+\frac{1}{n+1}s=\frac{1}{n+1}s+\frac{n}{n+1}b.$$

B hatte, ehe er von A bekam, $\frac{n}{(n+1)^2}s+\frac{nn}{(n+1)^2}b$.

A hatte, ehe er an B abgab, $s-\left(\frac{n}{(n+1)^2}s+\frac{nn}{(n+1)^2}b\right)$

$$=s-\left(\frac{n}{(n+1)^2}s+\frac{nn}{(n+1)^2}(s-a)\right)$$

$$=s-\frac{n}{n+1}s+\frac{nn}{(n+1)^2}a$$

$$=\frac{1}{n+1}s+\frac{nn}{(n+1)^2}a.$$

Anfängliches Vermögen von A	Anfängliches Vermögen von B
$\frac{1}{n+1}s+\frac{nn}{(n+1)^2}a$	$\frac{n}{(n+1)^2}s+\frac{nn}{(n+1)^2}b.$

Gesezt nun, diese beyde Personen nehmen das nämliche Verfahren mit Geben und Zurükgeben zweymal vor.

Vermögen von A nach dem

ersten Hin und Wiedergeben . . . $\frac{1}{n+1}s+\frac{nn}{(n+1)^2}a$

Anfängl. Verm. von A . . . $\frac{1}{n+1}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\left(\frac{1}{n+1}s+\frac{nn}{(n+1)^2}a\right)$

$$=\frac{1}{n+1}\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 a$$

Vermögen von B nach dem ersten Hin und Wiedergeben $\cdots \frac{n}{(n+1)^2}s+\frac{nn}{(n+1)^2}b$

Anfängl. Verm. von B $\cdots \frac{n}{(n+1)^2}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\left(\frac{n}{(n+1)^2}s+\frac{nn}{(n+1)^2}b\right)$

$$=\frac{n}{(n+1)^2}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 b.$$

Gesezt nun, dasselbe Verfahren werde dreymal vorgenommen;

Anf. Verm. v. A $\cdots \frac{1}{n+1}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\left(\frac{1}{n+1}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 a\right)$

$$=\frac{1}{n+1}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^6 a$$

Anf. Verm. v. B $\cdots \frac{n}{(n+1)^2}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\left(\frac{n}{(n+1)^2}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 b\right)\right)$

$$=\frac{n}{(n+1)^2}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^6 b$$

Das Verfahren werde viermal vorgenommen.

Erstes Vermögen von A

$$\frac{1}{n+1}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4+\left(\frac{n}{n+1}\right)^6\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^8 a$$

von B

$$\frac{n}{(n+1)^2}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4+\left(\frac{n}{n+1}\right)^6\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^8 a$$

Allgemein. Das Hin- und Wiedergeben werde mmal vorgenommen.

Anfängliches Vermögen von A

$$\frac{1}{n+1}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2m-2}\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2m} a$$

oder $\frac{1}{n+1} s \times \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2m}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2m} a$

oder $\frac{1}{n+1} s \times \frac{(n+1)^{2m}-n^{2m}}{(n+1)^{2m-2}(2n+1)} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2m} a$

oder $\frac{(n+1)^{2m}-n^{2m}}{(n+1)^{2m-1}(2n+1)} s + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2m} a.$

Anfängliches Vermögen von B

$\frac{n}{(n+1)^2} s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2m-2}\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2m} b$

oder $\frac{n}{(n+1)^2} s \times \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2m}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2m} b$

oder $ns \times \frac{(n+1)^{2m}-n^{2m}}{(n+1)^{2m}(2n+1)} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2m} b$

oder $\frac{n}{2n+1} \times \frac{(n+1)^{2m}-n^{2m}}{(n+1)^{2m}} s + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2m} b$

So ist demnach, für ein mmaliges Hin- und Hergeben,

das anfängl. V. v. A $\left(\frac{n+1}{2n+1} - \frac{n}{2n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2m-}\right) s + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2m} a$

. . . . . B $\frac{n}{2n+1}\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2m}\right) s + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2m} b.$

Die Grenzen dieser Werthe, denen sie desto näher kommen, je größer m ist, sind . . . $\frac{n+1}{2n+1} s$, und $\frac{n}{2n+1} s.$

Beyspiel. Es sey $n = 1$. Oder jede der beyden Personen A und B gebe der andern soviel, als diese hat.

Erstes Vermögen von A . . . $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}\right) s + \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} a$

. . . . . B . . . $\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\right) s + \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} b$

Hin und Hergeben einmaliges	Anfängl. Verm. von A	von B
2 . . .	$\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}a$	$\frac{1}{4}s+\frac{1}{4}b$
3 . . .	$\frac{5}{8}s+\frac{1}{16}a$	$\frac{5}{16}s+\frac{1}{16}b$
4 . . .	$\frac{21}{32}s+\frac{1}{64}a$	$\frac{21}{64}s+\frac{1}{64}b$
	$\frac{85}{128}s+\frac{1}{256}a$	$\frac{85}{256}s+\frac{1}{256}b$

§. 222.

Es sind drey Personen A, B, C; von diesen gibt A an B und an C $\frac{1}{n}$tel dessen ab, was jede hat.

Hierauf gibt B an A und an C $\frac{1}{n}$tel dessen, was jede nach dem Abgeben von A hat;

und dann gibt C an A und an B $\frac{1}{n}$tel dessen ab, was jede nach dem Abgeben von B hat.

Das Vermögen der drey Personen A, B, C ist alsdenn beziehungsweise a, b, c.

A und B haben beziehungsweise a und b, nachdem sie von C $\frac{1}{n}$tel dessen, was sie hatten, empfangen haben; folglich hatten sie, ehe sie von C bekamen, $\frac{n}{n+1}a$ und $\frac{n}{n+1}b$; und das Vermögen von C war vor diesem Abgeben

$$s-\frac{n}{n+1}(a+b)=s-\frac{n}{n+1}(s-c)=\frac{1}{n+1}s-\frac{n}{n+1}c.$$

A und C haben $\frac{n}{n+1}a$, und $\frac{1}{n+1}s+\frac{n}{n+1}c$, nachdem sie von B $\frac{1}{n}$tel dessen, was sie haben, bekommen haben; folglich hatten sie, ehe sie dis bekamen, beziehungsweise $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a$ und $\frac{n}{(n+1)^2}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 c$. Mithin war das Vermögen der Person B, ehe sie etwas abgab,

$$s-\left(\frac{n}{(n+1)^2}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2(a+c)\right)$$

$$=s-\left(\frac{n}{(n+1)^2}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2(s-b)\right)$$

$$=s-\frac{n}{n+1}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 b=\frac{1}{n+1}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 b.$$

B und C haben beziehungsweise $\frac{1}{n+1}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 b$, und $\frac{n}{(n+1)^2}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 c$, nachdem sie von A $\frac{1}{n}$tel dessen, was sie hatten, empfangen haben. Folglich hatten sie anfänglich $\frac{n}{(n+1)^2}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 b$, und $\frac{nn}{(n+1)^3}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 c$. Mithin war das anfängliche Vermögen von A

$$s-\left(\frac{n}{(n+1)^2}s+\frac{nn}{(n+1)^3}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3(b+c)\right)$$

$$=s-\left(\frac{n}{(n+1)^2}s+\frac{nn}{(n+1)^3}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 s-\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 a\right)$$

$$=s-\left(\frac{n}{(n+1)^2}s+\frac{nn}{(n+1)^2}s-\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 a\right)$$

$$=s-\frac{n}{n+1}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 a$$

$$=\frac{1}{n+1}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 a.$$

Für ein einmaliges Hin- und Wiedergeben

Vermögen von A $\frac{1}{n+1}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 a$

B $\frac{n}{(n+1)^2}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 b$

C $\frac{n}{(n+1)^3}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 c.$

Für ein zweymaliges Hin- und Wiedergeben auf dieselbe Art

Vermögen von A $\frac{1}{n+1}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^6 a$

B $\frac{n}{(n+1)^2}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^6 b$

C $\frac{nn}{(n+1)^3}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^6 c$

Für ein dreymaliges Hin- und Wiedergeben

Vermögen von A $\frac{1}{n+1}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3+\left(\frac{n}{n+1}\right)^6\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^9 a$

. . . . $B\frac{n}{(n+1)^2}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3+\left(\frac{n}{n+1}\right)^6\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^9 b$

. . . . $C\frac{nn}{(n+1)^3}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3+\left(\frac{n}{n+1}\right)^6\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^9 c$

. .

. .

. .

Für ein mmaliges Hin- und Wiedergeben

Vermögen von A $\frac{1}{n+1}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3(m-1)}\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3m} a$

. . . . $B\frac{n}{(n+1)^2}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3(m-1)}\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3m} b$

. . . . $C\frac{nn}{(n+1)^3}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3(m-1)}\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3m} c$

oder Vermögen von A . . $\frac{1}{n+1}s\times\frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3m}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^3}+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3m} a$

. . . . $B\ldots\frac{n}{(n+1)^2}s\times\frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3m}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^3}+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3m} b$

. . . . $C\ldots\frac{nn}{(n+1)^3}s\times\frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3m}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^3}+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3m} c$

Die Grenzen dieser leztern Größen sind beziehungsweise

$$\frac{(n+1)^2}{(n+1)^3-n^3}s,\quad \frac{n(n+1)}{(n+1)^3-n^3}s,\quad \frac{nn}{(n+1)^3-n^3}s$$

oder

$$\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+n(n+1)+nn}s,\quad \frac{n(n+1)}{(n+1)^2+n(n+1)+nn}s,\quad \frac{nn}{(n+1)^2+n(n+1)+nn}s.$$

§. 223.

Es seyen vier Personen A, B, C, D, welche auf ähnliche Art einander geben und zurükgeben. Nämlich

A gibt jeder der drey andern $\frac{1}{n}$tel dessen, was sie haben.

B gibt jeder der drey andern $\frac{1}{n}$tel dessen, was sie haben, nachdem sie von A bekommen haben.

C gibt jeder der drey andern $\frac{1}{n}$tel dessen, was sie haben, nachdem sie von B bekommen haben.

D gibt jeder der drey andern $\frac{1}{n}$tel dessen, was sie haben, nachdem sie von C bekommen haben.

Sie haben alsdenn beziehungsweise die Summen a, b, c, d.

A, B und C haben beziehungsweise a, b, c, nachdem sie von D $\frac{1}{n}$tel dessen, was sie haben, bekommen haben. Folglich hatten sie vorher beziehungsweise $\frac{n}{n+1}a$, $\frac{n}{n+1}b$, $\frac{n}{n+1}c$. Und D hatte $s-\frac{n}{n+1}(s-d)=\frac{1}{n+1}s+\frac{n}{n+1}d$.

A, B und D haben beziehungsweise $\frac{n}{n+1}a$, $\frac{n}{n+1}b$, $\frac{1}{n+1}s+\frac{n}{n+1}d$, nachdem sie von C bekommen haben; folglich hatten sie vorher $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a$, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 b$, $\frac{n}{(n+1)^2}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 d$, und C hatte $s-\left(\frac{n}{(n+1)^2}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2(s-c)\right)$

$$=s-\left(\frac{n}{n+1}s-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 c\right)=\frac{1}{n+1}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 c.$$

A, C und D haben beziehungsweise $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a$, $\frac{1}{n+1}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 c$, $\frac{n}{(n+1)^2}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 d$, nachdem sie von B bekommen haben; folglich hatten sie vorher $\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 a$, $\frac{n}{(n+1)^2}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 c$, $\frac{nn}{(n+1)^3}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 d$; und B hatte $s-\left(\frac{n}{(n+1)^2}s+\frac{nn}{(n+1)^3}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3(s-b)\right)$

$$=s-\left(\frac{n}{(n+1)^2}s+\frac{nn}{(n+1)^2}s-\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 b\right)=s-\frac{n}{n+1}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 d$$
$$=\frac{1}{n+1}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 b.$$

B, C und D haben beziehungsweise

$\frac{1}{n+1}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 b$, $\frac{n}{(n+1)^2}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 c$, $\frac{nn}{(n+1)^3}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 d$, nachdem sie von A bekommen haben; folglich hatten sie vorher

$\frac{n}{(n+1)^2}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 b$, $\frac{nn}{(n+1)^3}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 c$, $\frac{n^3}{(n+1)^4}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 d$, und A hatte

$$s-\left(\frac{n}{(n+1)^2}s+\frac{nn}{(n+1)^3}s+\frac{n^3}{(n+1)^4}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4(s-a)\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 a.$$

Für einmal Hin- und Wiedergeben

Vermögen von A . . $\frac{1}{n+1}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 a$

. . . B . . $\frac{n}{(n+1)^2}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 b$

. . . C . . $\frac{nn}{(n+1)^3}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 c$

. . . D . . $\frac{n^3}{(n+1)^4}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 d$.

Für zweymal;

Vermögen von A . . $\frac{1}{n+1}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^8 a$

. . . B . . $\frac{n}{(n+1)^2}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^8 b$

. . . C . . $\frac{nn}{(n+1)^3}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^8 c$

. . . D . . $\frac{n^3}{(n+1)^4}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^8 d$

Für dreymal;

Verm. v. A . . $\frac{1}{n+1}s\left(1+\left(\frac{1}{n+1}\right)^4+\left(\frac{n}{n+1}\right)^8\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{12} a$

. . . B . . $\frac{n}{(n+1)^2}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4+\left(\frac{n}{n+1}\right)^8\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{12} b$

. . . C . . $\frac{nn}{(n+1)^3}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4+\left(\frac{n}{n+1}\right)^8\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{12} c$

. . . D . . $\frac{n^3}{(n+1)^4}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4+\left(\frac{n}{n+1}\right)^8\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{12} d$

. .

. .

. .

Für mmal;

Vm. v. A $\frac{1}{n+1}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4(m-1)}\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4m} a$

. . B $\frac{n}{(n+1)^2}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4(m-1)}\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4m} b$

. . C $\frac{nn}{(n+1)^3}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4(m-1)}\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4m} c$

. . D $\frac{n^3}{(n+1)^4}s\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^4+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4(m-1)}\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4m} d$

oder Verm. von $A \ldots \frac{1}{n+1}S \times \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4m}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{4m} a$

$\ldots B \ldots \frac{n}{(n+1)^2}S \times \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4m}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{4m} b$

$\ldots C \ldots \frac{nn}{(n+1)^3}S \times \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4m}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{4m} c$

$\ldots D \ldots \frac{n^3}{(n+1)^4}S \times \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4m}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{4m} d$

Die Grenzen dieser Größen sind beziehungsweise

$$\frac{(n+1)^3}{(n+1)^3+(n+1)^2 n+(n+1)nn+n^3}S$$

$$\frac{n(n+1)^2}{(n+1)^3+(n+1)^2 n+(n+1)nn+n^3}S$$

$$\frac{nn(n+1)}{(n+1)^3+(n+1)^2 n+(n+1)nn+n^3}S$$

$$\frac{n^3}{(n+1)^3+(n+1)^2 n+(n+1)nn+n^3}S$$

Diese Beyspiele sind hinlänglich, um den allgemeinen Gang und die allgemeinen Resultate dieser Aufgabe bey irgend einer Anzahl von Personen bemerklich zu machen.

Es seyen demnach A, B, C, D, E . . . K, L eine Anzahl λ von Personen, deren eine jeder der übrigen den nten Theil dessen gibt, was sie haben, nämlich

A anfänglich,
B, nachdem sie von A bekommen,
C, nachdem sie von B bekommen,
D, nachdem sie von C bekommen,
E, nachdem sie von D bekommen,

. . . . . .

L, nachdem sie von K bekommen.

Und ihre respectiven Vermögen seyen nach diesen Umtauschungen a, b, c, d, e . . . . k, l.

Man wird haben
für einen Cirkel von Umtauschungen

Vermögen von A . . $\frac{1}{n+1}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}a$

. . . . B . . $\frac{n}{(n+1)^2}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}b$

. . . . C . . $\frac{nn}{(n+1)^3}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}c$

. . . . D . . $\frac{n^3}{(n+1)^4}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}d$

. . . . . .

. . . . L . . $\frac{n^{\lambda-1}}{(n+1)^{\lambda}}s+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}e.$

Für zwey Cirkel

Vermögen von A . . $\frac{1}{n+1} s \times \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2\lambda}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2\lambda} a$

. . . B . . $\frac{n}{(n+1)^2} s \times \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2\lambda}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2\lambda} b$

. . . C . . $\frac{nn}{(n+1)^3} s \times \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2\lambda}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2\lambda} c$

. . . D . . $\frac{n^3}{(n+1)^4} s \times \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2\lambda}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2\lambda} d$

. . . L . . $\frac{n^{\lambda-1}}{(n+1)^{\lambda}} s \times \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2\lambda}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2\lambda} l$

Für m Cirkel

Vermögen von A . . $\frac{1}{n+1} s \times \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{m\lambda}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{m\lambda} a$

. . . . . B . . $\frac{n}{(n+1)^2} s \times \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{m\lambda}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{m\lambda} b$

. . . . . C . . $\frac{nn}{(n+1)^3} s \times \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{m\lambda}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{m\lambda} c$

. . . . . D . . $\frac{n^3}{(n+1)^4} s \times \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{m\lambda}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{m\lambda} d$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . L . . $\frac{n^{\lambda-1}}{(n+1)^{\lambda}} s \times \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{m\lambda}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{m\lambda} l$

Anmerkung. Wenn jede Person, statt jeder der übrigen den nten Theil von dem zu geben, was sie haben, diesen nten Theil von ihnen bekommt; so ist das Verfahren und die Formeln die nämlichen, wenn man n-1 statt n+1 sezt.

Ich habe im neunten Kapitel §. 151. gesagt, daß die allgemeine Bestimmung der Zahl, welche angibt, auf wieviel Arten ein gegebener Wurf durch eine gegebene Anzahl von Würfeln hervorgebracht werden kann, von der Summa-

tion der geometrischen Progressionen abhänge. Ich werde nun den Zusammenhang zwischen diesen beyden Gegenständen zeigen.

§. 224.

Lehnsaz. 1°. Man nehme das Quadrat der Summe

$$a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6+\ldots+a^n$$

einer geometrischen Progression, deren Glieder alle Potenzen des ersten von ganzen und positiven Exponenten sind. Es sey Ma^N irgend ein Glied dieses Quadrats. Dieses Glied ist die Summe aller Produkte zu zwey und zwey von Gliedern, deren Summe der Exponenten N ist; und mithin zeigt der Coefficient M die Menge der Arten an, auf welche der Exponent N die Summe zweyer Exponenten 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . n der geometrischen Reyhe seyn kann; wohl verstanden, daß man im Ausdruk dieser Summe auf die Ordnung, nach welcher die Exponenten genommen sind, Rükficht nehme.

2°. Man nehme die dritte Potenz der Summe dieser Progression. Und es sey Ma^N ein Glied dieser Potenz. Dieses Glied ist die Summe aller Produkte zu drey und drey von den Gliedern der Progression, deren Summe der Exponenten N ist. Und der Coefficient M ist die Zahl, welche angibt, auf wieviel Arten der Exponent N durch die Summe dreyer Glieder der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . n gebildet werden kann; mit Rükficht auf die Anordnung dieser Glieder in diesen Summen.

3°. Man nehme die vierte Potenz gedachter Summe, und es sey Ma^N ein Glied dieser Potenz. Dieses Glied ist die Summe aller Produkte zu vier und vier von Gliedern, deren Summe der Exponenten N ist. Und der Coefficient M ist die Zahl, welche angibt, auf wieviel Arten der Exponent N durch die Summen von vier Gliedern der Reyhe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . n gebildet werden kann; indem man auf die Anordnungen dieser Glieder in diesen Summen Rükficht nimmt.

Allgemein. Die Summe der Progression sey auf eine Potenz erhoben, deren Exponent eine ganze und positive Zahl r ist; und es sey Ma^r ein Glied dieser Potenz. Dieses Glied ist die Summe aller Produkte zu r und r von Gliedern, deren Summe der Exponenten N ist; und der Coefficient M zeigt an, auf wieviel Arten der Exponent N durch r Glieder der Reyhe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . n hervorgebracht werden kann; indem man auf die Anordnungen dieser Glieder in dieser Summe Rükſicht nimmt.

Demnach reducirt ſich die Beſtimmung der Zahl, welche angibt, auf wieviel Arten eine gegebene Zahl durch die Summen einer gegebenen Anzahl von Gliedern der Reyhe der natürlichen Zahlen hervorgebracht werden kann, indem man auf die Ordnung dieſer Glieder in dieſen Summen Rükſicht nimmt, auf die Beſtimmung der Glieder einer Potenz der Summe einer geometriſchen Reyhe, deren Glieder Potenzen des erſten Glieds zu ganzen und poſitiven Zahlen ſind, ſo daß der Exponent dieſer Potenz einerley mit der Zahl der Glieder iſt, aus welchen jede Summe beſtehen ſoll.

Und da dieſe Anwendung durch die Unterſuchung des Geſezes, nach welchem die Anzahlen der Arten, wie ſich gegebene Würfe mit einer gegebenen Anzahl gewöhnlicher Würfel herbey führen laſſen, beſtimmt werden, veranlaßt worden iſt; ſo will ich dieſen Gegenſtand durch den Fall erläutern, wo die Progreſſion, von deren Summe der Glieder man die Potenzen nimmt, nur aus ſechs Gliedern beſteht.

§. 225.

Es iſt $a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6 = a(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5)$

$$= a \times \frac{1-a^6}{1-a}$$

folglich

$$(a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)^r = a^r \times \left(\frac{1-a^6}{1-a}\right)^r.$$

Nun ist $\frac{1}{(1-a)^r} = 1 + \frac{r}{1}a + \frac{r}{1}\cdot\frac{r+1}{2}a^2 + \frac{r}{1}\cdot\cdot\frac{r+2}{3}a^3 +$
$\frac{r}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{r+3}{4}a^4 + \frac{r}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{r+4}{5}a^5 + \frac{r}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{r+5}{6}a^6 + \cdots$

und $(1-a^6)^r = 1 - \frac{r}{1}a^6 + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}a^{12} - \frac{r}{1}\cdot\cdot\frac{r-2}{3}a^{18} +$
$\frac{r}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{r-3}{4}a^{24} - \frac{r}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{r-4}{5}a^{30} + \frac{r}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{r-5}{6}a^{36} + \cdots$

Multiplicirt man diese beyde Reyhen durch einander, und jedes Glied des Produkts durch a^r; so erhält man eine Reyhe, die aus Perioden von sechs Gliedern besteht, so daß die Coefficienten der Glieder jeder Periode aus gleich viel Gliedern bestehen, und daß die Anzahlen dieser Glieder wachsen wie die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4... auf folgende Art.

1te Periode.

Glied,	Coeff.	Glied,	Coeff.
a^r,	1	a^{r+1},	$\frac{r}{1}$
a^{r+2},	$\frac{r}{1}\cdot\frac{r+1}{2}$	a^{r+3},	$\frac{r}{1}\cdot\cdot\frac{r+2}{3}$
a^{r+4},	$\frac{r}{1}\cdot\cdot\frac{r+3}{4}$	a^{r+5},	$\frac{r}{1}\cdot\cdot\frac{r+4}{5}$

2te Periode.

a^{r+6},	$\frac{r}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{r+5}{6}$	a^{r+7},	$\frac{r}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{r+6}{7}$
	$-\frac{r}{1}$		$-\frac{r}{1}\cdot\frac{r}{1}$
a^{r+8},	$\frac{r}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{r+7}{8}$	a^{r+9},	$\frac{r}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{r+8}{9}$
	$-\frac{r}{1}\cdot\frac{r}{1}\cdot\frac{r+1}{2}$		$-\frac{r}{1}\cdot\frac{r}{1}\cdot\cdot\frac{r+2}{3}$
a^{r+10},	$\frac{r}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{r+9}{10}$	a^{r+11},	$\frac{r}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{r+10}{11}$
	$-\frac{r}{1}\cdot\frac{r}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{r+3}{4}$		$-\frac{r}{1}\cdot\frac{r}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{r+4}{5}$

3te Periode.

$$a^{r+12}, \frac{r}{1} \cdot \frac{r+11}{12}$$

$$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+5}{6}$$

$$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2}$$

$$a^{r+13}, \frac{r}{1} \cdot \frac{r+12}{13}$$

$$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+6}{7}$$

$$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r}{1}$$

$$a^{r+14}, \frac{r}{1} \cdot \frac{r+13}{14}$$

$$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+7}{8}$$

$$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+1}{2}$$

$$a^{r+15}, \frac{r}{1} \cdot \frac{r+14}{15}$$

$$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+8}{9}$$

$$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+2}{3}$$

$$a^{r+16}, \frac{r}{1} \cdot \frac{r+15}{16}$$

$$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+9}{10}$$

$$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+3}{4}$$

$$a^{r+17}, \frac{r}{1} \cdot \frac{r+16}{17}$$

$$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+10}{11}$$

$$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+4}{5}$$

4te Periode.

$$a^{r+18}, \frac{r}{1} \cdot \frac{r+17}{18}$$

$$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+11}{12}$$

$$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+5}{6}$$

$$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r-2}{3}$$

$$a^{r+19}, \frac{r}{1} \cdot \frac{r+18}{19}$$

$$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+12}{13}$$

$$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+6}{7}$$

$$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r-2}{3} \cdot \frac{r}{1}$$

$$a^{r+20}, \frac{r}{1} \cdot \frac{r+19}{20}$$

$$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+13}{14}$$

$$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+7}{8}$$

$$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r-2}{3} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+1}{2}$$

$$a^{r+21}, \frac{r}{1} \cdot \frac{r+20}{21}$$

$$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+14}{15}$$

$$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+8}{9}$$

$$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r-2}{3} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+2}{3}$$

a^{r+22}, $\frac{r}{1} \cdots \frac{r+21}{22}$

$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+15}{16}$

$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r}{1} \cdot \cdot \frac{r+9}{10}$

$- \frac{r}{1} \cdot \cdot \frac{r-2}{3} \cdot \frac{r}{1} \cdot \cdot \frac{r+3}{4}$

a^{r+23}, $\frac{r}{1} \cdots \frac{r+22}{23}$

$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+16}{17}$

$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+1}{11}$

$- \frac{r}{1} \cdot \cdot \frac{r-2}{3} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+4}{5}$

5te Periode.

a^{r+24}, $\frac{r}{1} \cdots \frac{r+23}{24}$

$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+17}{18}$

$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+11}{12}$

$- \frac{r}{1} \cdot \cdot \frac{r-2}{3} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+5}{6}$

$+ \frac{r}{1} \cdot \cdot \frac{r-3}{4}$

a^{r+25}, $\frac{r}{1} \cdots \frac{r+24}{25}$

$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+18}{19}$

$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+12}{13}$

$- \frac{r}{1} \cdot \cdot \frac{r-2}{3} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+6}{7}$

$+ \frac{r}{1} \cdot \cdot \frac{r-3}{4} \cdot \frac{r}{1}$

a^{r+26}, $r \cdots \frac{r+25}{26}$

$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+19}{20}$

$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+13}{14}$

$- \frac{r}{1} \cdot \cdot \frac{r-2}{3} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+7}{8}$

$+ \frac{r}{1} \cdots \frac{r-3}{4} \cdot \frac{r}{1} \cdot \frac{r+1}{2}$

a^{r+27}, $r \cdots \frac{r+26}{27}$

$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+20}{21}$

$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+14}{15}$

$- \frac{r}{1} \cdot \cdot \frac{r-2}{3} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+8}{1}$

$+ \frac{r}{1} \cdots \frac{r-3}{4} \cdot \frac{r}{1} \cdot \cdot \frac{r+2}{2}$

a^{r+28}, $r \cdots \frac{r+27}{28}$

$- \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+21}{22}$

$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+15}{16}$

$- \frac{r}{1} \cdot \cdot \frac{r-2}{3} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+9}{10}$

$+ \frac{r}{1} \cdots \frac{r-3}{4} \cdot \frac{r}{1} \cdots \frac{r+3}{4}$

a^{r+29}, $r \cdots \frac{r+28}{29}$

$- \frac{r}{1} \times \frac{r}{1} \cdots \frac{r+22}{23}$

$+ \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \times \frac{r}{1} \cdots \frac{r+16}{17}$

$- \frac{r}{1} \cdot \cdot \frac{r-2}{3} \times \frac{r}{1} \cdots \frac{r+10}{11}$

$+ \frac{r}{1} \cdot \cdot \frac{r-3}{4} \times \frac{r}{1} \cdots \frac{r+4}{5}$

(M+1)te Periode.

a^{r+6m}; Coeff.

$$\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6m-1}{6}$$

$$-\frac{r}{1}\times\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6(m-1)-1}{6(m-1)}$$

$$+\frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\times\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6(m-2)-1}{6(m-1)}$$

$$-\frac{r}{1}\cdot\frac{r-2}{3}\times\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6(m-3)-1}{6(m-3)}$$

$$\vdots$$

$$\mp\frac{r}{1}\cdots\frac{r-(m-2)}{m-1}\times\frac{r}{1}\cdots\frac{r+5}{6}$$

$$\mp\frac{r}{1}\cdots\frac{r-(m-1)}{m}$$

a^{r+6m+1}; Coeff.

$$\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6m}{6m+1}$$

$$-\frac{r}{1}\times\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6(m-1)}{6(m-1)+1}$$

$$+\frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\times\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6(m-2)}{6(m-2)+1}$$

$$-\frac{r}{1}\cdot\frac{r-2}{3}\times\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6(m-3)}{6(m-3)+1}$$

$$\vdots$$

$$\pm\frac{r}{1}\cdots\frac{r-(m-2)}{m-1}\times\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6}{7}$$

$$\mp\frac{r}{1}\cdots\frac{r-(m-1)}{m}\times\frac{r}{1}$$

a^{r+6m+2};

$$\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6m+1}{6m+2}$$

$$-\frac{r}{1}\cdot\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6(m-1)+1}{6(m-1)+2}$$

$$+\frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\times\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6(m-2)+1}{6(m+2)+2}$$

$$-\frac{r}{1}\cdots\frac{r-2}{3}\times\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6(m-3)+1}{6(m-3)+2}$$

$$\vdots$$

$$\pm\frac{r}{1}\cdots\frac{r-(m-2)}{m-1}\cdot\frac{r}{1}\cdots\frac{r+7}{8}$$

$$\mp\frac{r}{1}\cdots\frac{r-(m-1)}{m}\times\frac{r}{1}\cdot\frac{r+1}{2}$$

a^{r+6m+3};

$$\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6m+2}{6m+3}$$

$$-\frac{r}{1}\cdot\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6(m-1)+2}{6(m-1)+3}$$

$$+\frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\times\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6(m-2)+2}{6(m+2)+2}$$

$$-\frac{r}{1}\cdots\frac{r-2}{3}\times\frac{r}{1}\cdots\frac{r+6(m-3)+2}{6(m-3)+3}$$

$$\vdots$$

$$\pm\frac{r}{1}\cdots\frac{r-(m-2)}{m-1}\times\frac{r}{1}\cdots\frac{r+8}{9}$$

$$\mp\frac{r}{1}\cdots\frac{r-(m-1)}{m}\times\frac{r}{1}\cdots\frac{r+2}{3}$$

a^{r+6m+3};

$$\frac{r}{1} \cdots \frac{r+6m+3}{6m+4}$$
$$-\frac{r}{1} \times \frac{r}{1} \cdots \frac{r+6(m-1)+3}{6(m-1)+4}$$
$$+\frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \times \frac{r}{1} \cdots \frac{r+6(m-2)+3}{6(m-2)+4}$$
$$-\frac{r}{1} \cdot \frac{r-2}{3} \times \frac{r}{1} \cdots \frac{r+6(m-3)+3}{6(m-3)+4}$$
$$\vdots$$
$$\pm\frac{r}{1} \cdots \frac{r-(m-2)}{m-1} \times \frac{r}{1} \cdots \frac{r+9}{10}$$
$$\mp\frac{r}{1} \cdots \frac{r-(m-1)}{m} \times \frac{r}{1} \cdots \frac{r+3}{4}$$

a^{r+6m+4};

$$\frac{r}{1} \cdots \frac{r+6m+4}{6m+5}$$
$$-\frac{r}{1} \times \frac{r}{1} \cdots \frac{r+6(m-1)+4}{6(m-1)+5}$$
$$+\frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \times \frac{r}{1} \cdots \frac{r+6(m-2)+4}{6(m-2)+5}$$
$$-\frac{r}{1} \cdot \frac{r-2}{3} \times \frac{r}{1} \cdots \frac{r+6(m-3)+4}{6(m-3)+5}$$
$$\vdots$$
$$\pm\frac{r}{1} \cdots \frac{r-(m-2)}{m-1} \times \frac{r}{1} \cdots \frac{r+10}{11}$$
$$\mp\frac{r}{1} \cdots \frac{r-(m-1)}{m} \times \frac{r}{1} \cdots \frac{r+4}{5}$$

Beyspiel. Man verlangt zu wissen, auf wieviel Arten alle Würfe von 4 bis 24 mit vier gewöhnlichen Würfeln herbeygeführt werden können. Es sey demnach $r=4$.

Perioden.	Herbeyzuführende Würfe.	Anzahl der Arten.
1ste	4	1
	5	$\frac{4}{1}=4$
	6	$\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}=10$
	7	$\frac{4}{1}\cdot\frac{6}{3}=20$
	8	$\frac{4}{1}\cdot\frac{7}{4}=35$
	9	$\frac{4}{1}\cdot\frac{8}{5}=56$
2te	10	$\frac{4}{1}\cdot\frac{9}{6}=84$, $-\frac{4}{1}=-4$ $\Big\}=80$
	11	$\frac{4}{1}\cdot\frac{10}{7}=120$, $-\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{1}=-16$ $\Big\}=104$

$$12 \quad \left.\begin{array}{l} \cdot\ \cdot\ \frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{11}{8} = 165 \\ -\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2} = -40 \end{array}\right\} = 125$$

$$13 \quad \left.\begin{array}{l} \cdot\ \cdot\ \frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{12}{9} = 220 \\ -\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{6}{3} = -80 \end{array}\right\} = 140$$

$$14 \quad \left.\begin{array}{l} \cdot\ \cdot\ \frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{13}{10} = 286 \\ -\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{7}{4} = -140 \end{array}\right\} = 146$$

$$15 \quad \left.\begin{array}{l} \cdot\ \cdot\ \frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{14}{11} = 364 \\ -\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{8}{5} = -224 \end{array}\right\} = 140$$

$$\text{3te} \quad 16 \quad \left.\begin{array}{l} \cdot\ \cdot\ \frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{15}{12} = 455 \\ -\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{9}{6} = -336 \\ +\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2} = +6 \end{array}\right\} = 125$$

$$17 \quad \left.\begin{array}{l} \cdot\ \cdot\ \frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{16}{13} = 560 \\ -\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{10}{7} = -480 \\ +\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{1} = +24 \end{array}\right\} = 104$$

$$18 \quad \left.\begin{array}{l} \cdot\ \cdot\ \frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{17}{14} = 680 \\ -\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{11}{8} = -660 \\ +\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2} = +60 \end{array}\right\} = 80$$

$$19 \quad \left.\begin{array}{l} \cdot\ \cdot\ \frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{18}{15} = 816 \\ -\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{12}{9} = -880 \\ +\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{1}\cdot\cdot\frac{6}{3} = +120 \end{array}\right\} = 56$$

$$20 \quad \left.\begin{array}{l} \cdot\ \cdot\ \frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{19}{16} = 969 \\ -\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{13}{10} = -1144 \\ +\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{1}\cdot\cdot\frac{7}{4} = +210 \end{array}\right\} = 35$$

$$21 \quad \left.\begin{array}{l} \cdot\ \cdot\ \frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{20}{17} = 1140 \\ -\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{14}{9} = -1456 \\ +\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{1}\cdot\cdot\cdot\frac{8}{5} = +336 \end{array}\right\} = 20$$

$$4^{te} \quad . \quad . \quad 22 \quad . \quad . \quad \left.\begin{array}{r} \frac{4}{1}\cdots\frac{21}{18}=1330 \\ -\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdots\frac{15}{10}=-1820 \\ +\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{1}\cdots\frac{9}{6}=+504 \\ -\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3} \quad =-4 \end{array}\right\}=10$$

$$23 \quad . \quad . \quad \left.\begin{array}{r} \frac{4}{1}\cdots\frac{22}{19}=1540 \\ -\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdots\frac{16}{11}=-2240 \\ +\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{1}\cdots\frac{10}{7}=+720 \\ -\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\times\frac{4}{1}=-16 \end{array}\right\}=4$$

$$24 \quad . \quad . \quad \left.\begin{array}{r} \frac{4}{1}\cdots\frac{23}{20}=1771 \\ -\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdots\frac{17}{12}=-2720 \\ +\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\times\frac{4}{1}\cdots\frac{11}{8}=+990 \\ -\frac{4.3.2}{1.2.3}\times\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2} \quad = -40 \end{array}\right\}=1$$

$$25 \quad . \quad . \quad \left.\begin{array}{r} \frac{4}{1}\cdots\frac{24}{21}=2024 \\ -4\cdot\frac{4}{1}\cdots\frac{18}{15}=-3264 \\ +6\cdot\frac{4}{1}\cdots\frac{12}{9}-+1320 \\ -4\cdot\frac{4}{1}\cdots\frac{6}{3} \quad = \quad -80 \end{array}\right\}=0$$

Man findet auch, daß alle folgende Glieder verschwinden.

Wenn jeder Würfel statt sechs, p Seiten hätte; so würde jede Periode aus p Gliedern bestehen, welche den nämlichen Gesezen wie im vorhergehenden Beyspiele folgten.

Diese Formeln können verschiedene Untersuchungen veranlassen, theils über die gleiche Anzahl der Arten, wie gleichweit von r und rp entfernte Würfe hervorgebracht werden können, theils über das Verschwinden der Ausdrücke der Anzahlen der Arten, Würfe, die größer sind als rp, herbeyzuführen. Aber ich begnüge mich, diesen Gegenstand jungen Mathematikern zur Untersuchung vorzulegen, welche sich damit üben wollen.

Man muß wohl bemerken, daß in den vorhergehenden Untersuchungen Rüksicht auf die Anordnungen der Zahlen

genommen worden ist, deren Summen eine gegebene Zahl ausmachen. Man würde von den vorhergehenden ganz verschiedene Formeln bekommen, wenn man eine gegebene ganze Zahl in eine gegebene Anzahl von Theilen theilen wollte, ohne auf die Ordnung dieser Theile Rükſicht zu nehmen. Dis ist ebenfalls eine interessante und zur Uebung für junge Mathematiker sehr geschikte Untersuchung.

Anhang
zum fünfzehenten Kapitel.

Skizze der Anwendung geometrischer Reyhen auf recurrirende Reyhen.

Als Beyspiel von Reyhen, welche sich auf geometrische Progressionen zurükführen lassen, will ich nur noch die recurrirenden Reyhen nehmen, indem ich mich auf die vom zweyten Grad oder auf diejenige einschränke, welche aus Entwiklung von Brüchen entstehen, deren Nenner Funktionen einer veränderlichen Größe vom zweyten Grade sind.

§. 226.

Lehrsaz. Es sey ein Bruch, dessen Nenner sich in zwey einander ungleiche Factoren vom ersten Grad auflösen läßt: ich behaupte, daß dieser Bruch in zwey andere zerlegt werden kan, welche diese Factoren zu Nennern haben.

Es sey ein Bruch $\frac{A+Bx}{(1-ax)(1-bx)}$, dessen Nenner aus zwey Factoren vom ersten Grad $1-ax$, $1-bx$ zusammengesezt ist; ich behaupte, daß derselbe in zwey audere $\frac{P}{1-ax}$, $\frac{Q}{1-bx}$ zerlegt werden kann, welche diese Factoren zu Nennern haben.

Es sey also

$$\frac{A+Bx}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{P}{1-ax} + \frac{Q}{1-bx} = \frac{P(1-bx)+Q(1-ax)}{(1-ax)(1-bx)}$$

folglich $A+Bx = P+Q-(Pb+Qa)x$.

So ist mithin $P+Q=A$

$$Pb+Qa=-B$$

daher

$$\begin{array}{ll} Pb+Qb=Ab & Pa+Qa=Aa \\ Pb+Qa=-B & Pb+Qa=-B \\ \hline Q(b-a)=Ab+B & P(a-b)=Aa+B \end{array}$$

$$Q=-\frac{Ab+B}{a-b} \qquad P=\frac{Aa+B}{a-b}$$

$$\frac{A+Bx}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{Aa+B}{a-b}\times\frac{1}{1-ax} - \frac{Ab+B}{a-b}\times\frac{1}{1-bx}$$

In der That ist $\frac{Aa+B}{a-b}\times\frac{1}{1-ax} - \frac{Ab+B}{a-b}\times\frac{1}{1-bx}$

$$= \frac{Aa+B-Aabx-Bbx}{(a-b)(1-ax)(1-bx)} - \frac{Ab+B-Aabx-Bax}{(a-b)(1-ax)(1-bx)}$$

$$= \frac{Aa-Ab+Bax-Bbx}{(a-b)(1-ax)(1-bx)} = \frac{A+Bx}{(1-ax)(1-bx)}$$

Erstes Beyspiel. Zu zerlegender Bruch ... $\frac{1}{1-4x+3xx}$

$1-4x+3xx=1-4x+4xx-xx=(1-2x)^2-xx=(1-3x)(1-x)$

Daher $\frac{1}{1-4x+3xx} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{1-3x} - \frac{1}{1-x}\right)$.

Zu zerlegender Bruch . . . $\frac{3+2x}{1-4x+3xx}$

Man erhält $\frac{3+2x}{1-4x+3xx} = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{1-3x} - \frac{5}{1-x}\right)$.

Zweytes Beyspiel. Zu zerlegender Bruch ... $\frac{1}{1-x-xx}$

$1-x-xx = 1-x-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x^2 = (1-\frac{1}{2}x)^2-\frac{5}{4}x^2$

$$= \left(1-x\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(1+x\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{1-x-xx} = \frac{1}{1-x\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\times\frac{1}{1+x\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\times\frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\times\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x}$$

Zu zerlegender Bruch ... $\frac{1-2x}{1-x-xx}$

Man erhält $\frac{1-2x}{1-x-xx} = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times \frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x} - \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times \frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x}$

Drittes Beyspiel. Zu zerlegender Bruch ... $\frac{1}{1-2x+2x^2}$.

$$1-2x+2x^2 = 1-2x+x^2+x^2 = (1-x)^2+x^2$$
$$= (1-x+x\sqrt{-1})(1-x-x\sqrt{-1})$$
$$= (1-x(1-\sqrt{-1}))(1-x(1+\sqrt{-1}))$$

$$\frac{1}{1-2x+2x^2} = \frac{1}{1-x(1-\sqrt{-1})} \times \frac{1}{1-x(1+\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} \times \frac{1}{1-x(1-\sqrt{-1})} - \frac{1-\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} \times \frac{1}{1-x(1+\sqrt{-1})}$$

Zu zerlegender Bruch ... $\frac{2+3x}{1-2x+2x^2}$.

Man erhält

$$\frac{2+3x}{1-2x+2x^2} = \frac{5+2\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} \times \frac{1}{1-x(1+\sqrt{-1})} - \frac{5-2\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} \times \frac{1}{1-x(1-\sqrt{-1})}$$

Erste Anmerkung. Die Factoren 1-ax, 1-bx seyen einander gleich, so daß der zu entwickelnde Bruch sey $\frac{A+Bx}{(1-ax)^2}$.

Die Partialbrüche $\frac{Aa+B}{a-b} \times \frac{1}{1-ax}$ und $\frac{Ab+B}{a-b} \times \frac{1}{1-bx}$ sind in ihren Nennern mit dem Factor a-b behaftet, welcher a-a=0 wird. Dis zeigt die Unmöglichkeit der Zerlegung an. In der That können zwey Brüche, deren Nenner die einfachen Factoren 1-ax haben, nicht durch Addition oder Subtraction einen Bruch hervorbringen, dessen Nenner den doppelten Factor $(1-ax)^2$ hätte.

Der Bruch $\frac{A+Bx}{(1-ax)^2}$ kann auch unter der Form

$$\frac{Aa+B-B(1-ax)}{a(1-ax)^2} = \frac{Aa+B}{a} \times \frac{1}{(1-ax)^2} - \frac{B}{a} \times \frac{1}{1-ax}$$

dargestellt werden, wo die Zähler nicht mehr mit der veränderlichen x behaftet sind.

Zweyte Anmerkung. Das für die Zerlegung eines Bruchs, dessen Nenner zwey binomische Factoren hat, entwickelte Verfahren läßt sich auch auf die Zerlegung eines Bruchs anwenden, dessen Nenner irgend eine Anzahl binomischer Faktoren hat, und noch allgemeiner auf die Zerlegung eines Bruchs, von dessen Nenner die Factoren beschaffen seyn mögen wie sie wollen. Diese Zerlegung läßt sich auch ohne die Methode der unbestimmten Größen erhalten. Man findet zum Beyspiel, daß der Bruch

$$\frac{A+A'x+A''x^2+A'''x^3+\ldots\ldots+A^{N-1}x^{n-1}+A^Nx^n}{(1-ax)(B+B'x+B''x^2+B'''x^3+\ldots\ldots+B^{N-1}x^{n-1}+B^Nx^n)}$$

den Bruch

$$\frac{Aa^n+A'a^{n-1}+A''a^{n-2}+A'''a^{n-3}+\ldots\ldots+A^{N-1}a+A^N}{Ba^n+B'a^{n-1}+B''a^{n-2}+B'''a^{n-3}+\ldots\ldots+B^{N-1}a+B^N} \times \frac{1}{1-ax}$$

gibt, welcher den binomischen Factor $\frac{1}{1-ax}$ zum veränderlichen Nenner hat.

Es gehört nicht in den Plan dieser Elemente, diese Materie vollständig zu entwickeln, und von Functionen zu handeln, deren Nenner in irgend welche Factoren zerlegt werden können. Dieser Gegenstand findet vorzüglich in den höhern Theilen der Mathematik zahlreiche und wichtige Anwendungen.

§. 227.

Die Brüche, deren veränderliche Nenner die Binomien $1-ax$, $1-bx$ sind, geben, in Reyhen entwickelt, geometrische Progressionen: folglich reducirt sich auch die Reyhe, welche man erhält, wenn man den Bruch, dessen Nenner ein Trinomium ist, entwickelt, auf geometrische Progressionen. Nun ist die Reyhe, welche man durch Entwiklung eines Trinomiums erhält, eine recurrirende Reyhe der zweyten Ord-

nung: folglich werden die recurrirende Reyhen der zweyten Ordnung auf geometrische Progressionen reducirt.

Es ist $\frac{A+Bx}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{Aa+B}{a-b} \times \frac{1}{1-ax} - \frac{Ab+B}{a-b} \times \frac{1}{1-bx}$

$$= \frac{Aa+B}{a-b}(1+ax+a^2x^2+a^3x^3+a^4x^4+\ldots)$$

$$- \frac{Ab+b}{a-b}(1+bx+b^2x^2+b^3x^3+b^4x^4+\ldots)$$

Das nte Glied der aus der Entwiklung des Bruchs $\frac{A+Bx}{(1-ax)(1-bx)}$ entstehenden Reyhe ist

$$\frac{Aa+B}{a-b} \times a^{n-1}x^{n-1} - \frac{Ab+B}{a-b} \times b^{n-1}x^{n-1}$$

$$= \left(A \times \frac{a^n-b^n}{a-b} + B \times \frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}\right)x^{n-1}$$

Insbesondere ist das allgemeine Glied der aus der Entwiklung des Bruchs $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}$ entstehenden Reyhe... $\frac{a^n-b^n}{a-b}x^{n-1}$.

Erstes Beyspiel.

Zu entwickelnder Bruch $\frac{1}{1-4x+3xx} = \frac{1}{(1-3x)(1-x)}$

Allgemeines Glied . . . $\frac{1}{2}(3^n-1)x^{n-1}$

Zu entwickelnder Bruch... $\frac{3+2x}{1-4x+3xx} = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{1-3x} - \frac{5}{1-x}\right)$

Allgemeines Glied . . . $\frac{1}{2}(11 \cdot 3^{n-1}-5)x^{n-1}$.

Zweytes Beyspiel. Zu entwickelnder Bruch

$$\frac{1}{1-x-xx} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \times \frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \times \frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x}$$

Allgemeines Glied . . . $\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \times \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1}x^{n-1} \pm \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n-1}x^{n-1}$, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Zu entwickelnder Bruch

$$\frac{1-2x}{1-x-xx} = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times \frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x} - \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times \frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x}$$

Allgemeines Glied

$$\pm \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n-1}x^{n-1} - \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1}x^{n-1}.$$

Erste Reyhe 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...
Zweyte Reyhe 1, -1, 0, -1, -1, -2, -3, -5, -8, -13...
für $x=1$.

Drittes Beyspiel.

Zu entwickelnder Bruch

$$\frac{1}{1-2x+2x^2}=\frac{1+\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}\times\frac{1}{1-x(1+\sqrt{-1})}-\frac{1-\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}\times\frac{1}{1-x(1-\sqrt{-1})}$$

Allgemeines Glied . . .

$$\frac{1+\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}\times(1+\sqrt{-1})^{n-1}x^{n-1}-\frac{1-\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}\times(1-\sqrt{-1})^{n-1}x^{n-1}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{-1})^n-(1-\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}x^{n-1}.$$

Zu entwickelnder Bruch

$$\frac{2+3x}{1-2x+2x^2}=\frac{5+2\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}\times\frac{1}{1-x(1+\sqrt{-1})}-\frac{5-2\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}\times\frac{1}{1-x(1-\sqrt{-1})}$$

Allgemeines Glied . . .

$$\frac{5+2\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}\times(1+\sqrt{-1})^{n-1}x^{n-1}-\frac{5-2\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}\times(1-\sqrt{-1})^{n-1}x^{n-1}$$

Erste Reyhe
1, 2, 2, 0, -4, -8, -8, 0, 16, 32, 32, 0...
Zweyte Reyhe
2, 7, 16, 6, -8, -28, -40, -24, +32, +112, +160, +96...

§. 228.

Da die recurrirenden Reyhen, mit denen wir uns beschäftigen, sich auf die geometrischen Progressionen reduciren; so reducirt sich insbesondere ihre Summation auf die der geometrischen Progressionen.

Da das nte Glied der Reyhe, welche die Entwiklung des Bruchs $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}$ gibt,

$$\frac{a}{a-b}a^{n-1}x^{n-1}-\frac{b}{a-b}\times b^{n-1}x^{n-1}\text{ ist;}$$

so ist die Summe der n ersten Glieder dieser Reyhe

$$\frac{a}{a-b}\times\frac{1-a^nx^n}{1-ax}-\frac{b}{a-b}\times\frac{1-b^nx^n}{1-bx}$$

$$=\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}\cdot\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\times\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}x^n+ab\times\frac{a^n-b^n}{a-b}\times$$

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}x^{n+1}.$$

Ebenso da das allgemeine Glied der aus der Entwiklung des Bruchs $\frac{A+Bx}{(1-ax)(1-bx)}$ entstehenden Reyhe

$$\left(\frac{Aa+B}{a-b}\times a^{n-1}-\frac{Ab+B}{a-b}\times b^{n-1}\right)x^{n-1}$$ ist;

so ist die Summe der n ersten Glieder dieser Reyhe

$$\frac{Aa+B}{a-b}\times\frac{1-a^nx^n}{1-ax}-\frac{Ab+B}{a-b}\times\frac{1-b^nx^n}{1-bx}$$

$$=\frac{A+Bx}{(1-ax)(1-bx)}\cdot\frac{A\times\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}+B\times\frac{a^n-b^n}{a-b}}{(1-ax)(1-bx)}x^n+$$

$$\frac{Aab\times\frac{a^n-b^n}{a-b}+Bab\times\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}}{(1-ax)(1-bx)}x^{n+1}$$

Man kann die Summationen der recurrirenden Reyhen unabhängig von ihrer Reduction auf geometrische Progressionen auf folgende sehr einfache Art erhalten.

Es seyen p und p' die Glieder der Relationsscale, so daß jedes Glied der Reyhe die Summe der Produkte des nächst vorhergehenden Glieds durch p und des ohneinslezten durch p' sey. Es seyen Q', Q'', Q''', Q''''... Q^{N-1}, Q^{N-1}, Q^N die Glieder der recurrirenden Reyhe; so hat man folgende Gleichungen:

$$Q''' = pQ'' + p'Q'$$
$$Q'''' = pQ''' + p'Q''$$
$$Q^{v} = pQ'''' + p'Q'''$$
$$Q^{vi} = pQ^{v} + p'Q''''$$
$$\vdots$$

$$Q^{N-II} = pQ^{N-III} + p'Q^{N-IV}$$
$$Q^{N-I} = pQ^{N-II} + pQ^{N-III}$$
$$Q^{N} = pQ^{N-I} + p'Q^{N-II}$$

Die Summe aller ersten Glieder dieser Gleichungen ist der Summe der um ihre beyden ersten Glieder verminderten Reyhe gleich. Die Summe der ersten Theile der zweyten Glieder dieser Gleichungen ist der Summe der Produkte aller Glieder der Reyhe ausser dem ersten und lezten durch p gleich, und die Summe der zweyten Theile ist der Summe der Produkte aller Glieder der Reyhe ausser den zwey lezten durch p' gleich. Man hat mithin folgende Gleichung

$$s-(Q'+Q'') = p(s-(Q'+Q^N)) + p'(s-(Q^{N-I}+Q^N))$$

Erster Fall. Es sey $1 > p+p'$.

$$s(1-(p+p')) = Q'(1-p)+Q''-p'Q^{N-I}-(p+p')Q^N$$
$$s = \frac{Q'(1-p)+Q''-p'Q^{N-I}-(p+p')Q^N}{1-(p+p')}$$

Zweyter Fall. Es sey $1 < p+p'$.

$$s(p+p'-1) = (p+p')Q^N + p'Q^{N-I} - Q'' + (p-1)Q'$$
$$s = \frac{(p+p')Q^N + p'Q^{N-I} - Q'' + (p-1)Q'}{p+p'-1}$$

Dritter Fall. Es sey $p+p' = 1$.

So kann man aus diesem Verfahren unmittelbar nichts für den Werth von s schliessen, welcher in der Gleichung, durch welche man ihn zu bestimmen suchte, verschwindet.

Man erhält für diesen Fall

$$Q'+Q'' = p(Q'+Q^N) + p'(Q^{N-I}+Q^N)$$

daher $Q'(1-p)+Q''-p'Q^{N-I}+(p+p')Q^N$

oder $p'Q'+Q'' = p'Q^{N-I}+Q^N$.

Wenn p' negativ ist, so erhält man

$$Q''-p'Q' = Q^N - p'Q^{N-I};$$

insbesondere ist, wenn $Q'' = p'Q'$, $Q^N = p'Q^{N-1}$, und die Reyhe ist eine geometrische Progression.

Es sey $\frac{A+Bx}{1-px+p'x^2}$ der Bruch, aus dessen Entwiklung die vorgelegte recurrirende Reyhe entsteht, und es sey $1+p' = p$ oder $p' = p-1$.

Man hat $\frac{A+Bx}{1-px+p'x^2} = \frac{A+Bx}{1-px+(p-1)x^2} = \frac{A+Bx}{1-px+\frac{1}{4}p^2x^2-(\frac{1}{4}p^2-p+1)x^2}$

$$= \frac{A+Bx}{(1-\frac{1}{2}px)^2-(\frac{1}{2}p-1)^2x^2}$$

$$= \frac{A+Bx}{(1-x)(1-(p-1)x)}$$

$$= \frac{A+Bx}{(1-x)(1-p'x)}$$

$$= \frac{A+B}{1-p'} \times \frac{1}{1-x} - \frac{Ap'+B}{1-p'} \times \frac{1}{1-p'x}$$

Der allgemeine Ausdruk der Reyhe ist mithin

$$\frac{A+B}{1-p'} \times x^{n-1} - \frac{Ap'+B}{1-p'} \times p'^{n-1} x^{n-1}$$

das summatorische Glied für $x = 1$ ist

$$\frac{A+B}{1-p'} \times n - \frac{Ap'+B}{1-p'} \times \frac{1-p'^n}{1-p'}$$

Wenn $p' > 1$; so wird dieser Ausdruk

$$\frac{Ap'+B}{p'-1} \times \frac{p'^n-1}{p'-1} - n \times \frac{A+B}{p'-1}$$

Beyspiel. Zu entwickelnder Bruch $\frac{1}{1-4x+3x^2}$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-3x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{1-3x} - \frac{1}{1-x}\right)$$

Allgemeines Glied . . . $\frac{1}{2}(3^n x^{n-1} - x^{n-1}) = \frac{3^n-1}{2} x^{n-1}$

Summatorisches Glied für $x = 1$; . . . $\frac{3(3^n-1)}{2} - \frac{n}{2}$

Scholion. Es ist $\frac{A+Bx}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{Aa+B}{a-b} \times \frac{1}{1-ax} - \frac{Ab+B}{a-b} \times \frac{1}{1-bx}$

$$= \frac{Aa+B}{a-b}(1+ax+a^2x^2+a^3x^3+a^4x^4+a^5x^5+\ldots)$$
$$-\frac{Ab+B}{a-b}(1+bx+b^2x^2+b^3x^3+b^4x^4+b^5x^5+\ldots)$$
$$=A\left(\frac{a-b}{a-b}+\frac{aa-bb}{a-b}x+\frac{a^3-b^3}{a\,b}x^2+\frac{a^4-b^4}{a-b}x^3+\frac{a^5-b}{a-b}x^4+\ldots\right)$$
$$+B\left(\frac{a-b}{a-b}x+\frac{a^2-b^2}{a-b}x^2+\frac{a^3-b^3}{a-b}x^3+\frac{a^4-b^4}{a-b}x^4+\ldots\right)$$
$$= A(1+(a+b)x+(a^2+ab+b^2)x^2+(a^3\ldots b^3)x^3+(a^4\ldots b^4)x^4+\ldots)$$
$$+B\left(x+(a+b)x^2+(a^2\ldots b^2)x^3+(a^3\ldots b^3)x^4+\ldots\right)$$

Es sey $a=b$. So erhält man

$$\frac{A+Bx}{(1-ax)^2} = A(1+2ax+3a^2x^2+4a^3x^3+5a^4x^4+\ldots)$$
$$+B\left(x+2a\,x^2+3a^2x^3+4a^3x^4+\ldots\right)$$

wie dis seyn muß.

Ich begnüge mich in diesen Anfangsgründen mit dieser leichten Skizze der Anwendung geometrischer Progressionen auf recurrirende Reyhen. Diejenige, welche tiefer in diese Materie eindringen wollen, können die Werke der neuern Mathematiker, wie die von Euler, La Grange, Prony, La Croix u. a. darüber zu Rathe ziehen.

Sechzehentes Kapitel.

Ueber die stetigen Brüche.

Erster Theil.

Ueber den Ausdruk rationaler Größen durch stetige Brüche, die allgemeinen Eigenschaften der leztern, und ihren Gebrauch zu Auflösung unbestimmter Gleichungen vom ersten Grade.

§. 229.

Wir haben im Kapitel von den unbestimmten Aufgaben des ersten Grads gesehen, daß die Auflösung der Aufgabe: zwey Zahleu zu finden, deren Produkte durch gegebene Zahlen um eine gegebene Zahl von einander unterschieden seyen; auf die nämlichen Operationen führt, welche man mit den beyden ersten Zahlen vorzunehmen hätte, wenn man ihren grösten gemeinschaftlichen Theiler nach der bekannten Methode suchen wollte; indem man nämlich die grössere derselben durch die kleinere dividirt, alsdenn die kleinere durch den Rest dividirt, und durch den Rest, welchen man hiebey erhält, den vorigen Rest dividirt u. s. fort.

Man soll z. B. Vielfache von den Zahlen 1129, 972 suchen, die um eine gegebene Zahl r unterschieden seyen. Die Zahlen 1129, 972 sind Primzahlen zu einander; wenn man aber mit denselben verfährt, als ob man ihren grösten gemeinschaftlichen Theiler (welcher demnach die Einheit ist) suchen wollte, so erhält man die successiven Quotienten und Reste, welche folgendes Schema ausweist:

$$\begin{array}{r|l} 972 : 1129 & 1 \\ 927 & \\ \hline 157 : 972 & 6 \\ 942 & \\ \hline 30 : 157 & 5 \\ 150 & \\ \hline 7 : 30 & 4 \\ 28 & \\ \hline 2 : 7 & 3 \\ 6 & \\ \hline 1 : 2 & 2 \\ 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Die Quotienten sind nacheinander 1, 6, 5, 4, 3, 2; und man erhält keinen Rest, der den vorhergehenden genau mißt, bis man auf die Einheit kommt.

Nach der §. 130. angegebenen Methode aber wird man, um die Gleichung

$$1129e'' - 972e'' = \pm r$$

in ganzen Zahlen aufzulösen, folgendermassen verfahren:

$972e' = 1129e'' \mp r$; $e' = 1.e'' + \frac{157e'' \mp r}{972} = 1.e'' + e'''$, wo $157e'' \mp r = 972e'''$, also

$157e'' = 972e''' \pm r$; $e'' = 6e''' + \frac{30e''' \pm r}{157} = 6e''' + e^{IV}$; wo

$30e''' = 157e^{IV} \mp r$; $e''' = 5e^{IV} + \frac{7e^{IV} \mp r}{30} = 5e^{IV} + e^{V}$; wo

$7e^{IV} = 30e^{V} \pm r$; $e^{IV} = 4e^{V} + \frac{2e^{V} \pm r}{7} = 4e^{V} + e^{VI}$; wo

$2e^{V} = 7e^{VI} \mp r$; $e^{V} = 3e^{VI} + \frac{e^{VI} \mp r}{2} = 3e^{VI} + e^{VII}$; wo

$e^{VI} = 2e^{VII} + r$; wo für e^{VII} jede ganze Zahl gesezt werden kan.

Man erhält alsdenn, indem man zurükegeht, $e^{VII} = e^{VII}$

$e^{V} = 2e^{VII} \pm r$,

$e^{v}(=3e^{vi}+e^{vii}) = 7e^{vii} \pm 3r$
$e^{iv}(=4e^{v}+e^{vi}) = 30e^{vii} \pm 13r$
$e'''(=5e^{iv}+e^{v}) = 157e^{vii} \pm 68r$
$e''(=6e'''+e^{iv}) = 972e^{vii} \pm 421r$
$e'(=1.e''+e''') = 1129e^{vii} \pm 489r.$

Man kan hiebey bemerken, daß, wenn die Coefficienten von r in e^{vii}, e^{vi}, ... e'', e' nach einander, und über dieselbe von hinten an nach einander die erhaltenen Quotienten ohne den lezten gesezt werden, auf diese Art:

Quotienten 3, 4, 5, 6, 1

Coefficienten von r . . . 0, 1, 3, 13, 68, 421, 489;

jedes Glied der lezten Reyhe gefunden wird, indem man das Produkt der darüber befindlichen Zahl durch das nächst vorhergehende Glied zum zweyten vorhergehenden Glied addirt; z. B. $421 = 6.68 + 13$ u. s. w. Hieraus ergibt sich eine leichte Art, die Ausdrücke der gesuchten Zahlen e', e'' vermittelst der durch die angegebenen successiven Divisionen erhaltenen Quotienten unmittelbar darzustellen. Wir halten uns dabey nicht auf, sondern gehen auf eine andere ähnliche Art über, welche mit dem eigentlichen Gegenstand dieses Kapitels näher zusammenhängt.

§. 230.

Vermöge der durch die vorgenommene Division erhaltenen Quotienten und Reste hat man

$\frac{1129}{972} = 1 + \frac{157}{972}$; und es ist offenbar $\frac{1129}{972} > 1$.

Da aber $972 = 6.157 + 30$, folglich $\frac{157}{972} = \frac{1}{6 + \frac{30}{157}}$; so ist ferner

$\frac{1129}{972} = 1 + \frac{1}{6 + \frac{30}{157}} < 1 + \frac{1}{6}$; denn da $6 + \frac{30}{157} > 6$, so ist $\frac{1}{6 + \frac{30}{157}} < \frac{1}{6}$.

Und da $157 = 5 \cdot 30 + 7$, folglich $\frac{30}{157} = \frac{1}{5 + \frac{7}{30}}$; so ist

$\frac{1129}{972} = 1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{5 + \frac{7}{30}}} > 1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{5}}$; denn da $5 + \frac{7}{30} > 5$, so ist $\frac{1}{5 + \frac{7}{30}} < \frac{1}{5}$

folglich auch $6 + \frac{1}{5 + \frac{7}{30}} < 6 + \frac{1}{5}$

hingegen $\frac{1}{6 + \frac{1}{5 + \frac{7}{30}}} > \frac{1}{6 + \frac{1}{5}}$

mithin $1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{5 + \frac{7}{30}}} > 1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{5}}$

Da ferner $30 = 4 \cdot 7 + 2$, folglich $\frac{7}{30} = \frac{1}{4 + \frac{2}{7}}$; so ist weiter

$\frac{1129}{972} = 1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4 + \frac{2}{7}}}} < 1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4}}}$

Denn da $4 + \frac{2}{7} > 4$, so ist $\frac{1}{4 + \frac{2}{7}} < \frac{1}{4}$; und $5 + \frac{1}{4 + \frac{2}{7}} < 5 + \frac{1}{4}$

daher $\frac{1}{5 + \frac{1}{4 + \frac{2}{7}}} > \frac{1}{5 + \frac{1}{4}}$, und $6 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4 + \frac{2}{7}}} > 6 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4}}$

daher $\frac{1}{6 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4 + \frac{2}{7}}}} < \frac{1}{6 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4}}}$, und $1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7}}}} < 1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4}}}$

Da endlich $7 = 3 \cdot 2 + 1$, folglich $\frac{2}{7} = \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}$; so ist

$\frac{1129}{972} = 1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}}} > 1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}}}$, wie sich auf die nämliche Art wieder zeigen läßt.

Man sieht, daß aus den durch die fortgesezten Divisionen der Zahl 1129 durch 972, und ihrer folgenden successiven Reste auf die angegebene Art erhaltenen Quotienten

1, 6, 5, 4, 3, 2

sich

sich der stetige Bruch $1+\frac{1}{6+\frac{1}{5+\frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}}}$

ergibt, welcher dem Bruch $\frac{112}{97}\frac{9}{2}$ gleich ist; indeß die Größen

$$1,\ 1+\frac{1}{6},\ 1+\frac{1}{6+\frac{1}{5}},\ 1+\frac{1}{6+\frac{1}{5+\frac{1}{4}}},\ 1+\frac{1}{6+\frac{1}{5+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}}}$$

abwechslungsweise kleiner und größer als $\frac{112}{97}\frac{9}{2}$ sind. Von diesen leztern Größen hat man aber

$$1+\frac{1}{6}=\frac{1.6+1}{6}=\frac{7}{6}$$

Und wenn man in $\frac{1.6+1}{1}$ statt 6 sezt $6+\frac{1}{5}$;

$$1+\frac{1}{6+\frac{1}{5}}=\frac{1.6+1+\frac{1}{5}}{6+\frac{1}{5}}=\frac{7+\frac{1}{5}}{6+\frac{1}{5}}=\frac{5.7+1}{5.6+1}=\frac{36}{31}$$

Sezt man wiederum in $\frac{5.7+1}{5.6+1}$, $6+\frac{1}{4}$ statt 5; so erhält man

$$1+\frac{1}{6+\frac{1}{5+\frac{1}{4}}}=\frac{5.7+1+\frac{7}{4}}{5.6+1+\frac{6}{4}}=\frac{36+\frac{7}{4}}{31+\frac{6}{4}}=\frac{4.36+7}{4.31+6}=\frac{151}{130}$$

Und statt 4, $4+\frac{1}{3}$ gesezt;

$$1+\frac{1}{6+\frac{1}{5+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}}}=\frac{4.36+7+\frac{36}{3}}{4.31+6+\frac{31}{3}}=\frac{151+\frac{36}{3}}{130+\frac{31}{3}}=\frac{3.151+36}{3.130+31}=\frac{489}{421}$$

Sezt man endlich statt 3, $3+\frac{1}{2}$; so erhält man

$$1+\frac{1}{6+\frac{1}{5+\frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}}}=\frac{3.151+36+\frac{151}{2}}{3.130+31+\frac{130}{2}}=\frac{489+\frac{151}{2}}{421+\frac{130}{2}}=\frac{2.489+151}{2.421+130}=\frac{1129}{972}$$

Man erhält demnach aus den Quotienten

1, 6, 5, 4, 3, 2

nach einander die Brüche $\frac{1}{1}, \frac{7}{6}, \frac{36}{31}, \frac{151}{130}, \frac{489}{421}, \frac{1129}{972}$,

von welchen der lezte der vorgelegte, oder derjenige ist, mit dessen Gliedern die Division angefangen worden; die übrigen alle aber vom ersten an abwechslungsweise kleiner und größer sind als $\frac{112}{97}\frac{9}{2}$; von welchen ferner der Zähler eines jeden, wenigstens vom dritten Bruche an, die Summe des

Produkts des darüber stehenden Quotienten durch den leztvorhergehenden Zähler und des vorlezten Zählers; und ebenso jeder Nenner vom dritten Bruche an die Summe des Produkts des darüberstehenden Quotienten durch den leztvorhergehenden Nenner und des vorlezten Nenners ist (z. B. 489 $= 3 \cdot 151 + 36$; $421 = 3 \cdot 130 + 31$). Man kann beyläufig bemerken, daß man hiedurch wiederum eine leichte Art hat, die Coefficienten von r (489, 421) in den Ausdrüken von e', e'' (§. 1.), und mithin eben diese Ausdrüke aus den oft erwähnten Quotienten darzustellen.

Allgemein. Es seyen p, q irgend zwey ganze Zahlen, und p größer als q, oder $\frac{p}{q}$ irgend ein gewönlicher unächter Bruch: man dividire die Zähler desselben durch den Nenner, und der Quotient sey μ; dividire alsdenn den Nenner durch den Rest, und der Quotient sey μ': dividire weiter den ersten Rest durch den zweyten, und nenne den Quotienten μ''; und fahre so fort, immer den vorlezten Rest durch den lezten zu dividiren, bis man auf eine Division ohne Rest kommt (welches nothwendig geschehen muß, da die Reste nach einander abnehmende ganze Zahlen sind) und es sey μ^s der lezte Quotient, den man auf diese Art erhalten hat; so ist

1°. der gegebene Bruch dem stetigen Bruch

$$\mu + \cfrac{1}{\mu' + \cfrac{1}{\mu'' + \cfrac{1}{\mu''' + \ddots + \cfrac{1}{\mu^s}}}}$$

gleich.

Denn es seyen r', r'', r''', $r^{IV} \ldots r^{s-1}$, r^s die successiven Reste, so daß man die Gleichungen habe:

$p = \mu q + r'$; folglich $\frac{p}{q} = \mu + \frac{r'}{q}$

$q = \mu' r' + r''$ . . $\frac{q}{r'} = \mu' + \frac{r''}{r'}$, und $\frac{r'}{q} = \frac{1}{\mu' + \frac{r''}{r'}}$

$r' = \mu'' r'' + r'''$ . . $\frac{r'}{r''} = \mu'' + \frac{r'''}{r''}$ . . $\frac{r''}{r'} = \frac{1}{\mu'' + \frac{r'''}{r''}}$

$r'' = \mu''' r''' + r^{IV}$ . . $\frac{r''}{r'''} = \mu''' + \frac{r_{IV}}{r'''}$ . . $\frac{r'''}{r''} = \frac{1}{\mu''' + \frac{r_{IV}}{r'''}}$

. . .

$r^{\varrho-2} = \mu^{\varrho-1} r^{\varrho-1} + r^{\varrho}$; . . . $\frac{r^{\varrho-2}}{r^{\varrho-1}} = \mu^{\varrho-1} + \frac{r^{\varrho}}{r^{\varrho-1}}$; . . . $\frac{r^{\varrho-1}}{r^{\varrho-2}} = \frac{1}{\mu^{\varrho-1} + \frac{r^{\varrho}}{r^{\varrho-1}}}$

$r^{\varrho-1} = \mu^{\varrho} r^{\varrho}$; . . . $\frac{r^{\varrho-1}}{r^{\varrho}} = \mu^{\varrho}$ . . . $\frac{r^{\varrho}}{r^{\varrho-1}} = \frac{1}{\mu^{\varrho}}$;

wobey man bemerken kan, daß, da $\frac{r'}{q}$, $\frac{r''}{r'}$, $\frac{r'''}{r''}$ .... lauter unächte Brüche seyn sollen, die Größen q, r', r'', r''' ... eine abnehmende Reyhe bilden; und, wenn p, q Primzahlen zu einander sind, der lezte Rest r^{ϱ}, der den vorhergehenden $r^{\varrho-1}$ genau mißt, die Einheit, dahin der vorlezte $r^{\varrho-1} = 2$, und $\mu^{\varrho} = r^{\varrho-1}$ seyn muß.

So erhält man durch successive Substitutionen der Werthe von $\frac{r'}{q}$, $\frac{r''}{r'}$, $\frac{r'''}{r'}$ ...

$$\frac{p}{q} = \mu + \frac{r'}{q}$$

$$= \mu + \cfrac{1}{\mu' + \cfrac{r''}{r'}}$$

$$= \mu + \cfrac{1}{\mu' + \cfrac{1}{\mu'' + \cfrac{r'''}{r''}}}$$

$$= \mu + \cfrac{1}{\mu' + \cfrac{1}{\mu'' + \cfrac{1}{\mu''' + \cfrac{r^{IV}}{r'''}}}}$$

$$\vdots$$

$$= \mu + \cfrac{1}{\mu' + \cfrac{1}{\mu'' + \cfrac{1}{\mu''' + \cdots\cdots + \cfrac{1}{\mu^{\rho-2} + \cfrac{r^{\rho-1}}{r^{\rho-2}}}}}}$$

$$= \mu + \cfrac{1}{\mu' + \cfrac{1}{\mu'' + \cfrac{1}{\mu''' + \cdots\cdots + \cfrac{1}{\mu^{\rho-2} + \cfrac{1}{\mu^{\rho-1} + \cfrac{r^{\rho}}{r^{\rho-1}}}}}}}$$

$$= \mu + \cfrac{1}{\mu' + \cfrac{1}{\mu'' + \cfrac{1}{\mu''' + \cdots\cdots + \cfrac{1}{\mu^{\rho-2} + \cfrac{1}{\mu^{\rho-1} + \cfrac{1}{\mu^{\rho}}}}}}}$$

2°. Man wird ebenso, wie beym vorhergehenden Beyspiel in Zahlen beweisen, daß die Grösßen

$$\mu,\ \mu+\frac{1}{\mu'},\ \mu+\frac{1}{\mu'+\frac{1}{\mu''}},\ \mu+\frac{1}{\mu'+\frac{1}{\mu''+\frac{1}{\mu'''}}},\ \ldots\ldots$$

$$\mu+\frac{1}{\mu'+\frac{1}{\mu''+\frac{1}{\mu'''+\ldots\ldots+\frac{1}{\mu^{\rho-1}}}}}$$

abwechslungsweise kleiner und grösßer als der vorgelegte Bruch $\frac{p}{q}$ sind; und es ist

$\mu=\frac{p'}{q'}$ (nämlich $\mu=p'$, $1=q'$) gesezt,

$\mu+\frac{1}{\mu'}=\frac{p'}{q'}+\frac{1}{\mu'q'}=\frac{\mu'p'+1}{\mu'q'}$. Man seze $\mu'p'+1=p''$, $\mu'q'=q''$

$$\mu+\frac{1}{\mu'+\frac{1}{\mu''}}=\frac{(\mu'+\frac{1}{\mu''})p'+1}{(\mu'+\frac{1}{\mu''})q'}=\frac{\mu'p'+1+\frac{p'}{\mu''}}{\mu'q'+\frac{q'}{\mu''}}=\frac{p''+\frac{p'}{\mu''}}{q''+\frac{q'}{\mu''}}=\frac{\mu''p''+p}{\mu''q''+q}$$

Man seze $\mu''p''+p'=p'''$, $\mu''q''+q'=q'''$

$$\mu+\frac{1}{\mu'+\frac{1}{\mu''+\frac{1}{\mu'''}}}=\frac{\mu''p''+p'+\frac{p''}{\mu'''}}{\mu''q''+q'+\frac{q''}{\mu'''}}=\frac{p'''+\frac{p''}{\mu''}}{q'''+\frac{q''}{\mu'''}}=\frac{\mu'''p'''+p''}{\mu'''q'''+q''}$$

und so weiter.

Man erhält demnach aus den gefundenen Quotienten $\mu,\ \mu',\ \mu'',\ \mu'''\ \ldots\ \mu^{\rho-1},\ \mu^{\rho}$

die Brüche $\frac{p'}{q'},\ \frac{p''}{q''},\ \frac{p'''}{q'''},\ \frac{p^{IV}}{q^{IV}}\ \ldots\ \frac{p^{\rho}}{q^{\rho}},\ \frac{p^{\rho+1}}{q^{\rho+1}}$,

von welchen der lezte dem vorgelegten Bruch $\frac{p}{q}$ gleich, die übrigen vom ersten an abwechselnd kleiner und größer als derselbe sind; indem die Glieder der Reyhe $p', p'', p'''\ldots$, und die Glieder der Reyhe $q', q'', q'''\ldots$ so von einander (die nachfolgende nämlich von den vorhergehenden) und von den darüber stehenden Quotienten abhangen, daß

$$\begin{aligned} p' &= \mu \quad , & q' &= 1 \\ p'' &= \mu' p' + 1 & q'' &= \mu' q' \\ p''' &= \mu'' p'' + p' & q''' &= \mu'' q'' + q' \\ p^{IV} &= \mu''' p''' + p'' & q^{IV} &= \mu''' q''' + q'' \end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

oder wenn man noch den Bruch $\frac{p^\circ}{q^\circ}$ voranschikt, indem man

$p^\circ = 1$ $\quad q^\circ = 0$ setzt;

daß

$$\begin{aligned} p' &= \mu p^\circ & q' &= 1 \\ p'' &= \mu' p' + p^\circ & q'' &= \mu' q' + q^\circ \\ p''' &= \mu'' p'' + p' & q''' &= \mu'' q'' + q' \end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

das ist, jedes Glied der beyden Reyhen $p^\circ, p', p''\ldots$, $q^\circ, q', q''\ldots$ vom dritten an dem Produkt des darüber stehenden Quotienten durch das leztvorhergehende Glied nebst dem vorlezten Glied gleich ist.

Anmerkung. Statt daß wir bey der mit dem Exempel in §. 1. vorgenommenen Division nach der gewönlichen Art immer solche Zahlen zu Quotienten genommen haben, deren Produkt durch den Divisor (wo nicht den Dividendus selbst) eine kleinere Zahl als den Dividendus gab; daher denn jeder Rest, und somit jeder folgende Quotient eine positive ganze Zahl war, und die Renner des aus diesen Quotienten erhaltenen stetigen Bruchs alle positiv waren: hätte man auch einen oder den andern dieser Quotienten um Eins größer als wirklich geschehen ist, die ganze Zahl, die zunächst größer als einer der vorkommenden Brüche war,

zum Quotienten nehmen können; wodurch man einen negativen Rest, mithin den folgenden Quotienten auch negativ, und im stetigen Bruch einen der Nenner negativ bekommen hätte. Wir werden übrigens auch in der Folge nur mit stetigen Brüchen von lauter positiven Nennern zu thun haben; deren Entstehungsart im allgemeinen auf folgendes hinauslauft:

Gesezt es sey a eine durch keine ganze Zahl auszudrükende, rationale oder irrationale Größe, deren Werth man so genau als möglich angeben soll. Nun sey μ die ihr zunächst kommende kleinere ganze Zahl, die mithin von ihr um einen Bruch, der kleiner ist als die Einheit, übertroffen werde: dieser Bruch sey $\frac{1}{a'}$. So ist demnach a' eine positive Größe, die größer ist als die Einheit; und man kann nun ebenfalls eine ganze μ'' suchen, die zunächst kleiner sey als a', mithin kleiner als dieselbe um einen ächten Bruch $\frac{1}{a''}$. So ist wiederum a'' positiv und größer als die Einheit; und man kann wiederum die ihr am nächsten kommende kleinere ganze Zahl μ'' suchen, die davon um weniger als die Einheit unterschieden sey. Dieser Unterschied sey $\frac{1}{a'''}$ so ist a'' positiv und größer als die Einheit; und man kan auf dieselbe Weise fortfahren. Man sieht, daß man auf diese Art dem Werth von a immer näher und näher kommt, und zwar auf die leichteste und geschwindeste Art, blos vermittelst ganzer Zahlen, deren jede kleiner als einer der gesuchten Werthe, demselben so nahe kommt als möglich.

Man hat

$$a = \mu + \frac{1}{a'}$$

$$a' = \mu' + \frac{1}{a''}; \qquad = \mu + \frac{1}{\mu + \frac{1}{a''}}$$

$$a'' = \mu'' + \frac{1}{a'''}; \qquad = \mu + \frac{1}{\mu' + \frac{1}{\mu'' + \frac{1}{a'''}}}$$

u. s. w. u. s. w.

Mithin im allgemeinen

$$a = \mu + \frac{1}{\mu' + \frac{1}{\mu'' + \frac{1}{\mu''' + \text{u. s. w.}}}}$$

Findet sich eine der Größen a', a'', a''' ... einer ganzen Zahl gleich; so hat der continuirliche Bruch mit derselben als ihrem lezten Nenner ein Ende; und dis ist der Fall, so oft a commensurabel oder durch einen rationalen Bruch ausgedrükt ist. Ist aber a eine irrationale Größe, so muß der Bruch nothwendig ins Unendliche fortgehen. Wir werden in der Folge die irrationalen Größen, die aus Gleichungen des zweyten Grads entstanden sind, näher in dieser Hinsicht betrachten; man erinnere sich inzwischen dessen, was schon im vierten Kapitel darüber vorgekommen ist.

Was wir hier im allgemeinen durch

$a, a', a'', a''' \ldots$ ausdrüken,

war in den vorhergehenden Beyspielen beziehungsweise

$\frac{1129}{972}, \frac{972}{157}, \frac{157}{30}, \frac{30}{7} \ldots$

$\frac{p}{q}, \frac{q}{r'}, \frac{r'}{r''}, \frac{r''}{r'''} \ldots$

Aufgaben. Einen stetigen Bruch finden, der dem Bruch $\frac{13}{5}$ gleich sey.

Den von Adrian Metius abgegebenen Exponenten des Näherungsverhältnisses der Peripherie zum Durchmesser, $\frac{355}{113}$, durch einen stetigen Bruch ausdrüken. Er wird seyn $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}$.

Ebenfalls den daraus folgenden Exponenten des Näherungsverhältnisses der Cirkelfläche zum Quadrat des Durchmessers, $\frac{355}{452}$ (§. 129.) durch einen stetigen Bruch ausdrüken. Er wird seyn $= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{15 + \frac{1}{2}}}}}}}$

§. 231.

Betrachten wir nun die Grösßen p', p'', p'''.... und q', q'', q'''... etwas näher; so erhellt fürs erste aus ihren Ausdrüken, da μ, μ', μ''... positive ganze Zahlen sind, von selbst, daß die einen und die andern eine Reyhe von zunehmenden Grösßen bilden; $p' < p'' < p'''$..., und $q' < q'' < q'''$...

Ferner erhält man, wenn man die Zähler und Nenner der Brüche $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''} = \frac{\mu' p' + 1}{\mu' q'}$, $\frac{p'''}{q'''} = \frac{\mu'' p'' + p'}{\mu'' q'' + q'}$, ... ins Kreuz mit einander multiplicirt, $p'q'' - q'p'' = -1$, $p''q''' - q''p''' = p''q' - q''p'$, $p'''q^{IV} - q'''p^{IV} = p'''q'' - q'''p''$ u. s. w.; folglich im allgemeinen

$$p^{n}q' - q^{n}p' = 1 \qquad \text{daher} \quad \frac{p''}{q''} - \frac{p'}{q'} = \frac{1}{q'q''}$$

$$p''q''' - q''p''' = 1 \qquad \frac{p''}{q''} - \frac{p'''}{q'''} = \frac{1}{q''q'''}$$

$$p'''q^{IV} - q'''p^{IV} = 1 \qquad \frac{p^{IV}}{q^{IV}} - \frac{p'''}{q'''} = \frac{1}{q'''q^{IV}}$$

$$p^{\nu}q^{\nu+1} - q^{\nu}p^{\nu+1} = 1 \qquad \frac{p^{\nu+1}}{q^{\nu+1}} - \frac{p^{\nu}}{q^{\nu}} = \frac{1}{q^{\nu}q^{\nu+1}}$$

$$p^{\nu+1}q^{\nu} - q^{\nu+1}p^{\nu} = 1 \qquad \frac{p_{\nu+1}}{p^{\nu+1}} - \frac{p^{\nu}}{p_{\nu}} = \frac{1}{q_{\nu}q_{\nu+1}}$$

u. s. w. u. s. w.

Folgerungen hieraus. 1°. Die Brüche $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'''}{q'''}$... müssen schon auf ihre kleinste Benennung gebracht, oder ihre Zähler und Nenner Primzahlen zu einander seyn, die keinen gemeinschaftlichen Theiler als die Einheit haben. Denn hätten z. B. p''' und q''' einen andern gemeinschaftlichen Theiler als die Einheit, so müßte auch die Größe $p''q''' - q''p'''$ durch denselben theilbar seyn; welches unmöglich ist, indem diese Größe $= 1$ ist.

2°. Man sieht, daß die Unterschiede zwischen zweyen zunächst auf einander folgenden Brüchen der Reyhe $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$,

$\frac{p'''}{q'''}$ ... beständig abnehmen, die Reyhe mithin nothwendig convergiren muß.

Nun behaupte ich weiter: daß der Unterschied zweyer auf einander folgenden Brüche so klein sey als möglich; so daß kein anderer Bruch zwischen dieselbe fallen könne, er habe denn einen größern Nenner als beyde.

Denn es seyen z. B. die beyden Brüche $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'''}{q'''}$, deren Unterschied $\frac{1}{q''q'''}$ ist; und es sey irgend ein anderer Bruch $\frac{m}{n}$, der zwischen jene beyde falle, nämlich $\rhd \frac{p'''}{q'''}$ und $\lhd \frac{p''}{q''}$ sey; so ist mithin

$$\frac{p''}{q''} - \frac{m}{n} \lhd \frac{p''}{q''} - \frac{p'''}{q'''}$$

das ist $\frac{np'' - mq''}{nq''} \lhd \frac{1}{q''q'''}$,

Nun kan aber $np'' - mq''$ nicht $\lhd 1$ seyn; da $\frac{p''}{q''} - \frac{m}{n} \rhd 0$, also $np'' - mp'' \rhd 0$; folglich muß $nq'' \rhd q''q'''$, $n \rhd q''' \rhd q''$ seyn.

Allgemein: Wenn der Unterschied zweyer Brüche einem Bruch gleich ist, dessen Zähler die Einheit, und dessen Nenner das Produkt ihrer beyden Nenner ist; so kan zwischen dieselbe kein anderer Bruch von einer kleineren Benennung fallen.

4°. Wenn man einen der sich dem Werthe von a nähernden Brüche $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'''}{q'''}$ ... nimmt, z. B. den Bruch $\frac{p^{iv}}{q^{iv}}$; und irgend einen andern Bruch von kleinerer Benennung $\frac{y}{z}$, wo y, z ganze Zahlen sind, und $z \lhd q^{iv}$; so ist die Größe $p^{iv} - aq^{iv}$ kleiner als $y - az$ (indem man von den Zeichen abstrahirt).

Denn da $p^{iv}q''' - q^{iv}p''' = 1$, so ist $y - az = (p^{iv}q''' - q^{iv}p''')y - (p^{iv}q''' - q^{iv}p''')az$. Es ist aber

$(p^{IV}q''' - q^{IV}p''')y = p'''(p^{IV}z - q^{IV}y) - p^{IV}(p'''z - q'''y)$, und ebenso

$(p^{IV}q''' - q^{IV}p''')az = aq'''(p^{IV}z - q^{IV}y) - aq^{IV}(p'''z - q'''y)$;

folglich $y - az = (p''' - aq''')(p^{IV}z - q^{IV}y) - (p^{IV} - aq^{IV})(p'''z - q'''y)$.

Nun sind immer $aq''' - p'''$ und $p^{IV} - aq^{IV}$ positiv.

Ist nun $\frac{y}{z} > \frac{p^{IV}}{q^{IV}}$, mithin auch $> a$ und $> \frac{p'''}{q'''}$ (3°); und $y - az$, $q'''y - p'''z$, $q^{IV}y - p^{IV}z$ positive Größen; so hat man

$$y - az = (aq''' - p''')(q^{IV}y - p^{IV}z) + (p^{IV} - aq^{IV})(q'''y - p'''z)$$

Ist aber $\frac{y}{z} < \frac{p'''}{q'''}$, folglich auch $< a$, und $< \frac{p^{IV}}{q^{IV}}$ (3°); und $az - y$, $p'''z - q'''y$, $p'''z - q^{IV}y$ positiv; so hat man

$$az - y = (aq''' - p''')(p^{IV}z - q^{IV}y) + (p^{IV} - aq^{IV})(p'''z - q'''y)$$

Daher $\begin{matrix} y - az \\ az - y \end{matrix}$ im $\begin{matrix} \text{ersten} \\ \text{andern} \end{matrix}$ Fall größer als jede der Größen $aq''' - p'''$, $p^{IV} - aq^{IV}$; und so gar größer als ihre Summe.

5°. Die Gleichung $mp - nq = \pm 1$, wenn p und q gegebene Primzahlen zu einander sind, ist immer in ganzen Zahlen auflösbar.

Erhält man nämlich durch fortgesezte Divisionen von p durch q, von q durch den Rest, vom zweyten Rest durch den ersten u. s. w. nach einander die Quotienten $\mu, \mu', \mu'' \ldots$ und bildet aus denselben die Brüche $\frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}, \frac{p'''}{q'''} \ldots$ den obigen Ausdrüken gemäs, deren lezter mit dem Bruch $\frac{p}{q}$ einerley seyn wird; es sey z. B. $\frac{p^{IV}}{q^{IV}}$ der lezte, mithin $p^{IV} = p$, $q^{IV} = q$; so ist nach obigem

$$p^{IV}q''' - q^{IV}p''' = 1, \text{ das ist } q'''p - p'''q = 1$$

Hat man nun die Gleichung $mp - nq = +1$ aufzulösen; so darf man um $m = q'''$, $n = p'''$ nehmen. Allgemein wenn der lezte Bruch $\frac{p}{q}$ in der Reyhe der Brüche $\frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}, \frac{p'''}{q'''} \ldots$ eine gerade Stelle einnimmt, $\frac{p}{q} = \frac{p^{2\varrho}}{q^{2\varrho}}$ sich findet; hat man nur $m = q^{2\varrho-1}$, $n = p^{2\varrho-1}$ zu nehmen.

Hat man aber die Gleichung $mp-nq=-1$ aufzulösen; so vermindere man den lezten Quotienten im vorliegenden Falle μ''', welcher, wie S. 339 bemerkt worden, ≥ 2 ist, um eine Einheit; man erhält alsdenn bey fortgesezter Division einen Quotienten weiter, nämlich die Einheit: die Exponenten werden demnach im vorliegenden Falle

$$\mu,\ \mu',\ \mu'',\ \mu'''-1,\ 1$$

und die entsprechenden Brüche seyen

$$\frac{p'}{q'},\ \frac{p''}{q''},\ \frac{p'''}{q'''},\ \frac{p^{IV}}{q^{IV}},\ \frac{p^{V}}{q^{V}}=\frac{p}{q};$$

so daß nun der Bruch $\frac{p}{q}$ eine ungerade Stelle, nämlich die fünfte, einnimmt; und es ist $p^{IV}q^{V}-q^{IV}p^{V}=1$

oder $q^{IV}p-p^{IV}q=-1$,

mithin der Gleichung Genüge geleistet, wenn man $m=q^{IV}$, $n=p^{IV}$ macht.

Beyspiel. Im vorhergehenden §. war $\frac{1129}{972}=\frac{p}{q}$ der sechste unter den Brüchen $\frac{1}{1}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{36}{31}$ u. s. w., nahm also unter den Brüchen $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'''}{q'''}$ ... eine gerade Stelle ein; der Gleichung $1129m-972n=+1$ geschieht also Genüge durch die Werthe $m=q^{V}=421$, $n=p^{V}=489$.

Hätte man aber die Gleichung $1129m-972n=-1$ aufzulösen; so seze man die Quotienten

$$1,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 1,\ 1,$$

und bilde hieraus die Brüche

$$\frac{1}{1},\ \frac{7}{6},\ \frac{36}{31},\ \frac{151}{130},\ \frac{489}{421},\ \frac{640}{551},\ \frac{1129}{972};$$

da nun unter diesen $\frac{1129}{972}=\frac{p^{VII}}{q^{VII}}$ eine ungerade Stelle einnimmt, so ist $551.1129-640.972=-1$;
mithin wird der Gleichung durch die Werthe $m=551$, $n=640$ Genüge geleistet.

Zusaz. Auf die Auflösung der Gleichung $mp-nq=\pm 1$ läßt sich die Auflösung jeder unbestimmten Gleichung vom ersten Grade

$$xp - yq = \pm r$$

wo p, q, r gegebene Zahlen und p, q Primzahlen zu einander sind, reduciren.

Man soll z. B. die Gleichungen $39x - 56y = 11$
$56y - 39x = 11$
in ganzen Zahlen auflösen.

Man erhält durch fortgesezte Divisionen von 56 durch 39, von 39 durch den Rest u. s. w. die Quotienten

1, 2, 3, 2, 2

und hieraus die Brüche $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{10}{7}, \frac{23}{16}, \frac{56}{39}$.

Da nun hier der Bruch $\frac{56}{39}$ in seiner Reyhe der fünfte ist, also eine ungerade Stelle einnimmt, so ist

$$23 \cdot 39 - 16 \cdot 56 = 1$$

daher $11 \cdot 23 \cdot 39 - 11 \cdot 16 \cdot 56 = 11$

und für jedes e, $39 \times (11 \cdot 23 \pm 56e) - 56 \times (11 \cdot 16 \pm 39e) = 11$;

also im allgemeinen $x = 11 \cdot 23 \pm 56e$
$y = 11 \cdot 16 \pm 39e$ für jede ganze Zahl e;

woraus man auch sogleich $x' = 56e - 11 \cdot 23$
$y' = 39e - 11 \cdot 16$

schliessen könnte; und $e = 5$ gesezt, in den kleinsten Zahlen

$x' = 27$
$y' = 19$.

Unmittelbar findet man, die Quotienten

1, 2, 3, 2, 1, 1 gesezt,

hieraus die Brüche $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{10}{7}, \frac{23}{16}, \frac{33}{23}, \frac{56}{39}$,

unter welchen der Bruch $\frac{56}{39}$ der sechste ist, also eine gerade Stelle einnimmt;

daher $23 \cdot 56 - 33 \cdot 39 = 1$

und $56 \times (11 \cdot 23 \pm 39e) - 39 \times (11 \cdot 33 \pm 56e) = 11$

Mithin allgemein $y' = 11 \cdot 23 \pm 39e$
$x' = 11 \cdot 33 \pm 56e$,

und für $e = 6$ und das untere Zeichen, wiederum in den kleinsten Zahlen $y' = 19$, $x' = 27$ wie vorhin.

§. 232.

Wir haben bemerkt, daß die Größen

$$\mu,\ \mu + \frac{1}{\mu'},\ \mu + \frac{1}{\mu' + \frac{1}{\mu''}} \cdots$$

und daher auch die ihnen gleichen Brüche $\frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}, \frac{p'''}{q'''} \cdots$ abwechslungsweise kleiner und größer sind als die gegebene Größe $\frac{q}{q}$ oder a, welcher der vollständige stetige Bruch

$$\mu + \frac{1}{\mu' + \frac{1}{\mu'' + \cdots + \frac{1}{\mu\rho}}}$$

, wofern er ein Ende nimmt, gleich ist. Die Größe a muß mithin zwischen jeden zwey zunächst auf einander folgenden Brüchen der Reyhe $\frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}, \frac{p'''}{q'''} \cdots$ als Grenzen enthalten seyn. Wir wollen nun weiter sehen, wie weit sich diese Brüche der Größe a nähern.

1°. Aus den ursprünglichen Formeln für die Entstehung der Größen $\mu, \mu', \mu'' \cdots$, und $p', p'', p''' \cdots$, $q', q'', q''' \cdots$, nämlich

$$a = \mu + \frac{1}{a'} \quad \text{und} \quad p' = \mu \quad , \quad q' = 1$$

$$a' = \mu' + \frac{1}{a''} \qquad p'' = \mu' p' + 1 \qquad q'' = \mu' q'$$

$$a'' = \mu'' + \frac{1}{a'''} \qquad p''' = \mu'' p'' + p' \qquad q''' = \mu'' q'' + q'$$

$$a''' = \mu''' + \frac{1}{a^{IV}} \qquad p^{IV} = \mu''' p''' + p'' \qquad q^{IV} = \mu''' q''' + q''$$

u. s. w. u. s. w.

erhält man durch succeſſive Subſtitutionen

$$a\left(=\mu+\frac{1}{a'}=\frac{a'\mu+1}{a'}\right)=\frac{a'p'+1}{a'q'}$$

$$\left(=\frac{\left(\mu'+\frac{1}{a''}\right)p'+1}{\left(\mu'+\frac{1}{a''}\right)q'}\right)=\frac{a''p''+p'}{a''q''+q'}$$

$$\left(=\frac{\left(\mu''+\frac{1}{a'''}\right)p''+p'}{\left(\mu''+\frac{1}{a'''}\right)q''+q'}\right)=\frac{a'''p'''+p''}{a'''q'''+q''}$$

u. ſ. w.

Daher, weil ferner

$p''q'-q''p'=1$ und $a'>\mu', <\mu'+1$

$p''q'''-q''q'''=1$ $a''>\mu'', <\mu''+1$

$p^{IV}q'''-q^{IV}p'''=1$ $a'''>\mu''', <\mu'''+1$

$p^{V}q^{IV}-q^{V}p^{IV}=1$ $a^{IV}>\mu^{IV}, <\mu^{IV}+1$ ſind;

u. ſ. w. u. ſ. w.

$a-\frac{p'}{q'}=\frac{1}{a'q'}<\frac{1}{\mu'q'}$ d. i. $\frac{1}{q'q''}$, und $>\frac{1}{(\mu'+1)q'}$ d. i. $\frac{1}{q'(q''+q')}$

$\frac{p''}{q''}-a=\frac{p''}{q''}-\frac{a''p''+p'}{a''q''+q'}=\frac{1}{q''(a''q''+q')}<\frac{1}{q''(\mu''q''+q')}$ d. i. $\frac{1}{q''q'''}$,

und $>\frac{1}{q''(\mu''q''+q'+q'')}$ d. i. $\frac{1}{q''(q'''+q'')}$

Ebenſo

$a-\frac{p'''}{q'''}=\frac{1}{q'''(a'''q'''+q'')}<\frac{1}{q'''q^{IV}}$ und $>\frac{1}{q'''(q^{IV}+q''')}$

$\frac{p^{IV}}{q^{IV}}-a=\frac{1}{q^{IV}(a^{IV}q^{IV}+q''')}<\frac{1}{q_{IV}q^{V}}$ und $>\frac{1}{q_{IV}(q^{V}+q^{IV})}$

u. ſ. w.

Hieraus erhellt, daß die Unterſchiede der Brüche $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'''}{q'''}$ ... und des Werths von a, und folglich die Fehler, welche man machte, wenn man ſtatt des Werths von a dieſe Brüche nähme, welche abwechſelnd kleiner und größer ſind als der Werth von a, beziehungsweiſe

kleiner als die Größen $\frac{1}{q'q''}$, $\frac{1}{q''q'''}$, $\frac{1}{q'''q^{IV}}$ ...

aber größer als $\frac{1}{q'(q''+q')}$, $\frac{1}{q''(q'''+q'')}$, $\frac{1}{q'''(q^{IV}+q''')}$ ...,

oder zwischen diesen Größen als Grenzen eingeschlossen wären; woraus man beurtheilen kan, wie klein diese Fehler sind, und wie sie von einem Bruch zum andern immer kleiner werden.

Noch mehr: da der Werth von a zwischen jeden zwey aufeinander folgenden Brüchen der Reyhe $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'''}{q'''}$ ... liegt, vermöge des oben bewiesenen aber (§. 231. 3°.) zwischen jede zwey auf einander folgende Brüche dieser Reyhe kein Bruch von kleinerer Benennung als jeder derselben fallen kann; so folgt hieraus, daß jeder der gedachten Brüche (z. B. $\frac{p''}{q''}$) die Größe a genauer ausdrükt als irgend ein anderer Bruch, dessen Nenner kleiner wäre als der Nenner (q''') des folgenden Bruchs der Reyhe.

2°. Theilt man die Reyhe $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'''}{q'''}$ ... in die zwey Reyhen

$$\frac{p'}{q'}, \frac{p'''}{q'''}, \frac{p^{V}}{q^{V}} \ldots\ldots$$
$$\frac{p''}{q''}, \frac{p^{IV}}{q^{IV}}, \frac{p^{VI}}{q^{VI}} \ldots\ldots$$

von welchen die erste aus lauter Brüchen, die kleiner, die zweyte aus lauter Brüchen, die größer als a sind, sich aber dem Werth von a, jene durch Wachsen, diese durch Abnahme nähern, besteht; so hat man, indem man eine dieser Reyhen, z. B. die erste, besonders betrachtet,

$$\frac{p'''}{q'''} - \frac{p'}{q'} = \frac{\mu''p''+p'}{\mu''q''+q'} - \frac{p'}{q'} = \frac{\mu''}{q'q'''}$$
$$\frac{p^{V}}{q^{V}} - \frac{p'''}{q'''} = \frac{\mu^{IV}p^{IV}+p''}{\mu^{IV}p^{IV}+q'''} - \frac{p'''}{q'''} = \frac{\mu^{IV}}{q'''q^{V}}$$

u. s. w.

Wenn nun wiederum die Zahlen μ'', μ^{IV}, μ^{VI} ... alle der Einheit gleich wären, so würde auch zwischen zwey auf einander folgen-

folgenden Brüchen der Reyhe $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p'''}{q'''}$ ... kein Bruch von kleinerer Benennung als jeder dieser beyden Brüche fallen können (§. 231. 3°). Ist jenes aber nicht der Fall, ist z. B. $\mu'' > 1$, gesezt es sey $= 4$; so können zwischen $\frac{p'''}{q'''}$ und $\frac{p^v}{q^v} = \frac{4p^{iv}+p'''}{4q^{iv}+q'''}$ die Zwischenbrüche

$$\frac{p^{iv}+p'''}{q^{iv}+q'''}, \frac{2p^{iv}+p'''}{2q^{iv}+q'''}, \frac{3p^{iv}+p'''}{3q^{iv}+q'''},$$

so viel nemlich als Einheiten in $\mu'' - 1$ sind, mit arithmetisch wachsenden Zählern und Nennern eingeschaltet werden, welche ebenfalls kleiner als a seyn, aber von einem Hauptbruch $\frac{p'''}{q'''}$ an zum andern $\frac{p^v}{q^v}$ beständig wachsen und die Eigenschaft haben werden, daß jeder derselben den Werth der Größe a genauer ausdrükt als jeder andere Bruch, der kleiner als a wäre und einen kleinen Nenner hätte.

Denn da die Ueberschüsse jedes dieser Brüche über den nächstvorhergehenden Bruch, nämlich

$$\frac{p^{iv}+p'''}{q^{iv}+q'''} - \frac{p'''}{q'''} = \frac{1}{q'''(q^{iv}+q''')}$$

$$\frac{2p^{iv}+p'''}{3q^{iv}+q'''} - \frac{p^{iv}+p'''}{q^{iv}+q'''} = \frac{1}{(q^{iv}+q''')(2q^{iv}+q''')}$$

$$\frac{3p^{iv}+p'''}{3q^{iv}+q'''} - \frac{2p^{iv}+p'''}{2q^{iv}+q'''} = \frac{1}{(2q^{iv}+q''')(3q^{iv}+q''')}$$

$$\frac{4p^{iv}+p'''}{4q^{iv}+q'''} \left(\text{d. i. } \frac{p^v}{q^v}\right) - \frac{3p^{iv}+p'''}{3p^{iv}+q'''} = \frac{1}{(3q^{iv}+q''')q^v}$$

alle positiv und Brüche sind, die zu Zählern die Einheit, und das Produkt ihrer Nenner zu Nennern haben, die Größen $\frac{p'''}{q'''}$, $\frac{p^v}{q^v}$ aber kleiner als a sind; so ist klar, daß diese Zwischenbrüche auch kleiner als a sind, aber sich dem Werth von a durch Wachstum nähern, so daß zwischen zwey derselben kein Bruch von kleinerer Benennung fallen kann (§. 231. 3°). Und da $\frac{p^{iv}}{q^{iv}} > a$, mithin jeder dieser Brüche sich der Größe a so nähert, daß sein Unterschied von a kleiner ist als der Unterschied des nämlichen Bruchs und des Bruchs $\frac{p^{iv}}{q^{iv}}$; aber

$$\frac{p^{IV}}{q^{IV}} - \frac{p'''}{q'''} = \frac{1}{q'''q^{IV}}$$

$$\frac{p^{IV}}{q^{IV}} - \frac{p^{IV}+p'''}{q^{IV}+q'''} = \frac{1}{q^{IV}(q^{IV}+q''')}$$

$$\frac{p^{IV}}{q^{IV}} - \frac{2p^{IV}+p'''}{2q^{IV}+q'''} = \frac{1}{q^{IV}(2q^{IV}+q''')}$$

$$\frac{p^{IV}}{q^{IV}} - \frac{3p^{IV}+p'''}{3q^{IV}+q'''} = \frac{1}{q^{IV}(3q^{IV}+q''')}$$

$$\frac{p^{IV}}{q^{IV}} - \frac{p^{V}}{q^{V}} = \frac{1}{q^{IV}q^{IV}},$$

und folglich auch kein Bruch von kleinerer Benennung zwischen irgend einem der Brüche $\frac{p'''}{q'''}$, $\frac{p^{IV}+p'''}{q^{IV}+q'''}$, $\frac{2p^{IV}+p'''}{2q^{IV}+q'''}$ u. s. w. und dem Bruche $\frac{p^{IV}}{q^{IV}}$ fallen kan; so folgt, daß jeder dieser Brüche der Größe a näher komme als jeder andere Bruch, der kleiner als a wäre und einen kleinern Nenner hätte.

Was über die Reyhe $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p'''}{q'''}$, $\frac{pv}{qv}$ ... gesagt worden ist, läßt sich auf die Reyhe $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p^{IV}}{q^{IV}}$, $\frac{p^{VI}}{q^{VI}}$ ... anwenden. Es lassen sich nämlich, wenn die Zahlen μ''', μ^{V} ... größer als die Einheit sind, zwischen die Brüche $\frac{p''}{q''}$ und $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p^{IV}}{q^{IV}}$ und $\frac{p^{VI}}{q^{VI}}$ ... verschiedene Zwischenbrüche einschalten, die alle größer als a sind, aber beständig abnehmen, und die Größe a genauer ausdrüken als jeder andere Bruch, der größer als a und in kleinern Zahlen ausgedrükt ist. Auch wenn μ' größer als die Einheit ist, kan man vor dem Bruch $\frac{p''}{q''}$ die Brüche $\frac{p'+1}{1}$, $\frac{2p'+1}{2}$, $\frac{3p'+1}{3}$ ... bis $\frac{\mu' p'+1}{\mu'} \left(= \frac{p''}{q''}\right)$ sezen, welche die nämliche Eigenschaft haben werden.

Man erhält auf diese Art folgende zwey vollständige Reyhen von Brüchen, die sich der Größe a nähern.

1°. Brüche, die kleiner als a sind und wachsen:

$\frac{p'}{q'}$; $\frac{p''+p'}{q''+q'}$, $\frac{2p''+p'}{2q''+q'}$, $\frac{3p''+p'}{3q''+q'}$, ... $\frac{\mu''p''+p'}{\mu''q''+q'} = \frac{p'''}{q'''}$;

$\frac{p^{IV}+p'''}{q^{IV}+q'''}$, $\frac{2p^{IV}+p'''}{2q^{IV}+q'''}$, $\frac{3p^{IV}+p'''}{3q^{IV}+q'''}$, ... $\frac{\mu^{IV}p^{IV}+p'''}{\mu^{IV}q^{IV}+q'''} = \frac{p^{V}}{q^{V}}$, u. ſ. w.

2°. Brüche, die gröſſer als a ſind und abnehmen.

$\frac{p'+1}{1}$, $\frac{2p'+1}{2}$, $\frac{3p'+1}{3}$, ... $\frac{\mu'p'+1}{\mu'} = \frac{p''}{q''}$; $\frac{p'''+p''}{q'''+q''}$, $\frac{2p'''+p''}{2q'''+q''}$,

$\frac{3p'''+p''}{3q'''+q''}$ .... $\frac{\mu'''p'''+p''}{\mu'''q'''+q''} = \frac{p^{IV}}{q^{IV}}$; u. ſ. w.

Iſt nämlich die Gröſſe a irrational, ſo gehen dieſe beyden Reyhen ohne Ende fort, weil in dieſem Fall die Reyhe der Hauptbrüche $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'''}{q'''}$ ... ſelbſt ohne Ende fortgeht. Iſt aber die Gröſſe a rational; ſo nimmt die Reyhe der Hauptbrüche, und damit auch eine der obigen Reyhen mit Zwiſchenbrüchen ein Ende mit einem Hauptbruch $\frac{p^{\varrho}}{q^{\varrho}}$, der der Gröſſe a gleich iſt; die andere hingegen kann ohne Ende fortgehen.

Wäre z. B. $\frac{p^{IV}}{q^{IV}} = a$; ſo hätte die zweyte Reyhe mit dieſem Bruch ein Ende; in der erſten aber könnte man auf den Bruch $\frac{p'''}{q'''}$ Brüche ohne Ende wie $\frac{mp^{IV}+p'''}{mq^{IV}+q'''}$ folgen laſſen, indem man für m die natürlichen Zahlen 1, 2, 3... nach der Ordnung ſezte: und da vermöge des obigen $\frac{p^{IV}}{q^{IV}}$ (das iſt a) $-\frac{mp^{IV}+p'''}{mq^{IV}+q'''} = \frac{1}{q^{IV}(mq^{IV}+q''')}$ iſt, ſo iſt offenbar, daß dieſe Brüche kleiner als der Werth von a, ſich demſelben immer mehr nähern werden, je gröſſer m, das iſt, je weiter ihre Reyhe fortgeſezt wird.

Beyſpiel. Für den oben (§. 230.) betrachteten Bruch $\frac{112}{97}$ erhält man

Brüche, die kleiner ſind als $\frac{112}{97}$ und wachſen:

$\frac{1}{1}$; $\frac{8}{7}$, $\frac{15}{13}$, $\frac{22}{19}$, $\frac{29}{25}$, $\frac{36}{31}$; $\frac{187}{161}$, $\frac{338}{291}$, $\frac{489}{421}$; $\frac{1618}{1393}$, $\frac{2747}{2365}$, $\frac{3876}{3337}$ .....

Brüche, die grösser sind als $\frac{11}{9}\frac{29}{72}$ und abnehmen:

$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}; \frac{43}{37}, \frac{79}{68}, \frac{115}{99}, \frac{151}{130}; \frac{640}{551}, \frac{11}{9}\frac{29}{72}$

Anmerkung. Die in diesem §. erörterten Eigenschaften der Haupt- und Zwischenbrüche, die aus den Nennern eines continuirlichen Bruchs auf die angegebene Art gebildet werden, dienen, einem in sehr großen Zahlen angegebenen Verhältnis in kleinern Zahlen so nahe zu kommen, daß man ihm nicht näher kommen kan, ohne größere Zahlen zu gebrauchen. Man hat Anwendung hievon auf das Verhältnis der Peripherie eines Cirkels zum Durchmesser und auf andere merkwürdige Verhältnisse gemacht.

Aus dem Ludolphischen Decimalbruch in fünf und dreyssig Ziffern 3, 14159, 26535, 89793, 23846, 26433, 83279, 50288 für das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser erhält man folgende Quotienten, um dasselbe in einem stetigen Bruch auszudrüken: 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1. Der Exponent jenes Verhältnisses ist nämlich

$$= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1}}}}} + \text{u. s. w.}$$

Man erhält hieraus folgende

Hauptbrüche, die gegen dem Exponenten Periph.: Durchm. convergiren

$(3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1,)$

$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317}, \frac{312689}{99532},$

$(2, 1, 3, 1, 14,)$

$\frac{833719}{265381}, \frac{1146408}{364913}, \frac{4272943}{1360120}, \frac{5419351}{1725033}, \frac{80143357}{25510582},$

(2)

$\frac{165707065}{52746197}, \ldots$

Man erhält alsdenn mit Einschaltung von Zwischenbrüchen folgende zwey Reyhen:

Brüche, die kleiner sind als $\frac{\text{Periph.}}{\text{Durchm.}}$

$\frac{3}{1}$, $\frac{25}{8}$, $\frac{47}{15}$, $\frac{69}{22}$, $\frac{91}{29}$, $\frac{113}{36}$, $\frac{135}{43}$, $\frac{157}{50}$, $\frac{179}{57}$, $\frac{201}{64}$, $\frac{223}{71}$, $\frac{245}{78}$,
$\frac{267}{85}$, $\frac{289}{92}$, $\frac{311}{99}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{688}{219}$, $\frac{1043}{332}$, $\frac{1398}{445}$, $\frac{1753}{558}$, $\frac{2108}{671}$, $\frac{2163}{788}$,
u. s. w.

Brüche, die grösser sind als $\frac{\text{Periph.}}{\text{Durchm.}}$

$\frac{4}{1}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{13}{4}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{19}{6}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{104348}{33215}$, $\frac{312689}{99532}$, $\frac{1146408}{364913}$,
$\frac{5419351}{1725033}$, $\frac{85563208}{27235615}$, $\frac{165707065}{52746197}$, $\frac{411557987}{131002976}$,
$\frac{1805248837}{574126577}$, u. s. w.

Man findet diese Reyhen weiter fortgesezt in Wallis Algebra, Kap. XI. (Operum Mathemat. Vol. II.)

Zweyter Theil.

Ueber den Ausdruk der Wurzeln reiner und unreiner quadratischer Gleichungen durch periodische stetige Brüche; über die Auflösung der Gleichung $p^2 - kq^2 = 1$ und einiger anderer unbestimmten Gleichungen vom zweyten Grade in ganzen Zahlen.

§. 233.

Aufgabe. Es sey irgend eine Zahl gegeben, die keine Quadratzahl sey: Man soll einen stetigen Bruch finden, welcher sich ihrer Quadratwurzel nähere. Die gegebene Zahl sey z. B. 79.

Auflösung. Nennt man $\sqrt{79} = a$, und befolgt das in der Anm. zu §. 230. gelehrte Verfahren; so sieht man, daß alles darauf ankommt, die Grösßen a', a'', a''' ... zu finden; indem man für die Grösßen μ, μ', μ'', μ''' .... nur die ganze Zahlen zu nehmen hat, welche unmittelbar kleiner als beziehungsweise a, a', a'', a''' .... sind.

Nun ist 8 die ganze Zahl, die unmittelbar kleiner ist als $\sqrt{79}$; und da $\sqrt{79}-8=\frac{15}{\sqrt{79}+8}$, so ist

$$\sqrt{79}=8+\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+8}{15}\right)}$$

Die ganze Zahl, die unmittelbar kleiner ist als $\frac{\sqrt{79}+8}{15}$, ist die Einheit; es ist nämlich $\frac{\sqrt{79}+8}{15}=1+\frac{\sqrt{79}-7}{15}=1+\frac{30}{15(\sqrt{79}+7)}$

$$=1+\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+7}{2}\right)};$$

daher $\sqrt{79}=8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+7}{2}\right)}}$

Die ganze Zahl, die unmittelbar kleiner ist als $\frac{\sqrt{79}+7}{2}$, ist 7; nämlich $\frac{\sqrt{79}+7}{2}=7+\frac{\sqrt{79}-7}{2}=7+\frac{30}{2(\sqrt{79}+7)}$

$$=7+\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+7}{15}\right)};$$ also

$$\sqrt{79}=8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+7}{15}\right)}}}$$

Die ganze Zahl, die unmittelbar kleiner ist als $\frac{\sqrt{79}+7}{15}$, ist 1; nämlich $\frac{\sqrt{79}+7}{15}=1+\frac{\sqrt{79}-8}{15}=1+\frac{1}{\sqrt{79}+8}$; also

$$\sqrt{79}=8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{79}+8}}}}$$

Die ganze Zahl, die unmittelbar kleiner ist als $\sqrt{79}+8$, ist 16; nämlich $\sqrt{79}+8=16+\sqrt{79}-8=16+\frac{15}{\sqrt{79}+8}$; demnach

$$\sqrt{79}=8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+8}{15}\right)}}}}}$$

Da wir nun $\frac{\sqrt{79}+8}{15}$ schon einmal als Nenner gehabt, und daraus durch fortgesezetes Verfahren die Nenner 1, 7, 1, 16, $\frac{\sqrt{79}+8}{15}$ gefunden haben; so ist offenbar, daß von 16 an die vorigen Nenner 1, 7, 1, 16 wiederkehren werden, und daß man durch blosse Wiederholung der aus diesen vier Gliedern bestehenden Periode den Bruch so weit fortsezen kan als man will.

Man hat also

$$\sqrt{79} = 8 + \frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{1}{16+\frac{1}{1+\frac{1}{7}}}}}} + \text{u. s. w.}$$

Daß der stetige Bruch, der eine incommensurable Quadratwurzel ausdrüken soll, nicht abbrechen kan, ist schon unter dem enthalten, was oben von jeder Irrationalgröße gesagt worden ist: in der That würde sonst, da für jeden abbrechenden stetigen Bruch sich ein ihm gleicher gewönlicher finden läßt, eine incommensurable Quadratwurzel einem gewönlichen Bruch gleich seyn können; welches im ersten Theil §. 64. als unmöglich erwiesen worden ist. Daß aber ein solcher stetiger Bruch nothwendig periodisch seyn müsse, wird in der Folge erwiesen werden.

Allgemein. Sey k irgend eine Zahl, die kein Quadrat ist; man soll ihre Quadratwurzel durch Näherung in einem continuirlichen Bruch ausdrüken.

Es kommt darauf an, aus der Größe $\sqrt{k}$ oder

a die positiven Größen $a', a'', a''', a^{IV} \ldots$

und die ganzen Zahlen, welche beziehungsweise zunächst kleiner sind als dieselbe

μ, $\mu', \mu'', \mu''', \mu^{IV} \ldots$

zu bestimmen, so daß

$\sqrt{k}$ oder $a = \mu + \frac{1}{a'}$; alsdenn ist

$$a' = \mu' + \frac{1}{a''} \qquad \sqrt{k} = \mu + \frac{1}{\mu'} + \frac{1}{\mu''} + \frac{1}{\mu'''} + \text{u. s. w.}$$

$$a'' = \mu'' + \frac{1}{a'''}$$

$$a''' = \mu''' + \frac{1}{a^{IV}}$$

u. s. w.

Man nehme fürs erste μ, die ganze Zahl, die unmittelbar kleiner ist als $\sqrt{k}$ oder a; so findet man daraus

$$a' = \frac{1}{a-\mu} = \frac{1}{\sqrt{k}-\mu} = \frac{-\mu-\sqrt{k}}{\mu^2-k} = \frac{-Q'-\sqrt{k}}{P'};$$

$\mu = Q'$

und $\mu^2 - k = P'$ gesezt.

Man nehme sodenn für μ' die ganze Zahl, die zunächst kleiner ist als a': so findet sich

$$a'' = \frac{1}{a'-\mu'} = \frac{1}{\frac{-Q'-\sqrt{k}}{P'} - \mu'} = \frac{P'}{-Q''-\sqrt{k}} = \frac{-Q''+\sqrt{k}}{P''};$$

$\mu' P' + Q' = Q''$

und $\frac{Q''^2-k}{P'} = P''$ gesezt.

Man nehme sodenn für μ'' die ganze Zahl, die zunächst kleiner ist als a''; man findet weiter

$$a''' = \frac{1}{a''-\mu''} = \frac{1}{\frac{-Q''+\sqrt{k}}{P''} - \mu''} = \frac{P''}{-Q'''+\sqrt{k}} = \frac{-Q'''-\sqrt{k}}{P''}$$

indem man $\mu'' P'' + Q'' = Q'''$

und $\frac{Q'''^2-k}{P''} = P'''$ sezt.

Man nehme für μ''' die ganze Zahl, die unmittelbar kleiner ist als a'''; man findet weiter ebenso

$$a^{IV} = \frac{-Q^{IV}+\sqrt{k}}{P^{IV}}; \qquad \mu''' P''' + Q''' = Q^{IV}$$

und $\frac{Q^{IV2}-k}{P'''} = P^{IV}$ gesezt.

Und so weiter.

Allgemein findet sich also zu Bestimmung der Grösen $\mu, \mu', \mu'', \mu''' \ldots$

$$0 = Q, \text{ und } 1 = P^\circ \text{ gesezt; } \mu < \sqrt{k} \text{ oder } \frac{-Q^\circ + \sqrt{k}}{P^\circ}$$

$$\mu = Q', \quad \frac{Q'^2 - k}{P^\circ} = P' \ldots; \mu' < \frac{-Q' - \sqrt{k}}{P'}$$

$$\mu' P' + Q' = Q'', \quad \frac{Q''^2 - k}{P'} = P'' \ldots; \mu'' < \frac{-Q'' + \sqrt{k}}{P'}$$

$$\mu'' P'' + Q'' = Q''', \quad \frac{Q'''^2 - k}{P''} = P''' \ldots; \mu''' < \frac{-Q''' - \sqrt{k}}{P'''}$$

u. s. w.

wo das Zeichen $<$ hinter den Grösen $\mu, \mu', \mu'' \ldots$ immer die ganze bedeutet, die unmittelbar kleiner ist als der folgende Ausdruk.

Beyspiel. Für $\sqrt{79}$ hat man

$Q^\circ = 0, \quad P^\circ = 1, \quad \mu < \sqrt{79} = 8$

$Q' = 8, \quad P' = \frac{8^2 - 79}{1} = -15, \quad \mu' < \frac{-8 - \sqrt{79}}{-15} = 1$

$Q'' = -1.15 + 8 = -7, \quad P'' = \frac{7^2 - 79}{-15} = 2, \quad \mu'' < \frac{7 + \sqrt{79}}{2} = 7$

$Q''' = 2.7 - 7 = 7, \quad P''' = \frac{7^2 - 79}{2} = -15, \quad \mu''' = \frac{-7 - \sqrt{79}}{-15} = 1$

$Q^{IV} = -1.15 + 7 = -8, \quad P^{IV} = \frac{8^2 - 79}{-15} = 1, \quad \mu^{IV} < \frac{8 + \sqrt{79}}{1} = 16$

$Q^V = 1.16 - 8 = 8, \quad P^V = \frac{8^2 - 79}{1} = -15, \quad \mu^V < \frac{-8 - \sqrt{79}}{-15} = 1$

u. s. w.

Man sieht leicht, daß, nachdem man

$$Q^V = Q', \text{ und } P^V = P'$$

(wo Q^V, P^V die vierte Stelle in der Reyhe der auf Q', P' folgenden Grösen $Q'', Q''', \ldots, P'', P''' \ldots$ einnehmen), daher denn auch $\mu^V = \mu'$

gefunden hat, indem μ' die ganze Zahl ist, die unmittelbar kleiner ist als $\frac{-Q'-\sqrt{k}}{p'}$

und μ^{v} . . . . $\frac{-Q^{v}-\sqrt{k}}{p^{v}} = \frac{-Q'-\sqrt{k}}{p'}$;

alsdenn die folgenden Glieder

$$Q^{vi} = Q'', \quad P^{vi} = P'', \quad \mu^{vi} = \mu'',$$
$$Q^{vii} = Q''', \quad P^{vii} = P''', \quad \mu^{vii} = \mu''',$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$Q^{ix} = Q^{v} = Q', \; P^{ix} = P^{v} = P', \; \mu^{ix} = \mu^{v} = \mu',$$
$$Q^{x} = Q^{vi} = Q'', \; P^{x} = P^{vi} = P'', \; \mu^{x} = \mu^{vi} = \mu'',$$

u. s. w.

daher die Größen in jeder der folgenden Reyhen

$$P', \; P^{v}, \; P^{ix}, \; P^{xiii} \ldots P'^{+4m}$$
$$P'', \; P^{vi}, \; P^{x}, \; P^{xiv} \ldots P''^{+4m}$$
$$P''', \; P^{vii}, \; P^{xi}, \; P^{xv} \ldots P'''^{+4m}$$
$$P^{iv}, \; P^{viii}, \; P^{xii}, \; P^{xvi} \ldots P^{iv+4m}$$

für jede ganze Zahl m

einander gleich seyn werden, und ebenso die diesen correspondirenden in den beyden andern Reyhen Q', Q'', Q'''... und μ', μ'', μ'''...

Allgemein: Wenn zwey correspondirende Glieder Q_π, P_π der für $\sqrt{k}$ gefundenen Reyhen Q', Q'', Q'''..., P', P'', P'''... in den fortgesezten Reyhen $Q^{\pi+1}$, $Q^{\pi+2}$, $Q^{\pi+3}$..., $P^{\pi+1}$, $P^{\pi+2}$, $P^{\pi+3}$... wieder mit einander zum Vorschein kommen, so daß sie eine gerade Stelle in diesen leztern Reyhen einnehmen; man sezte die 2ρte; so daß

$$Q^{\pi+2\rho} = Q^{\pi}, \; P^{\pi+2\rho} = P^{\pi} \text{ sey;}$$

so hat man, da die Wurzelgröße in den Ausdrüken $\frac{-Q^{\pi}\pm\sqrt{k}}{p^{\pi}}$, $\frac{-Q^{\pi+2\rho}\pm\sqrt{k}}{p^{\pi+2\rho}}$, durch welche μ^{π} und $\mu^{\pi+2\rho}$ bestimmt werden,

daſſelbe Zeichen hat, dieſe Ausdrüke einander gleich, und daher auch $\mu^{\pi} = \mu^{\pi+2\rho}$; und alsdenn weiter

$$Q^{\pi+2\rho+1} = Q^{\pi+1},\ P^{\pi+2\rho+1} = P^{\pi+1},\ \mu^{\pi+2\rho+1} = \mu^{\pi+1}$$

u. ſ. w.

überhaupt für jede Zahl Π, die gleich oder gröſſer iſt als π, und für jede Zahl ganze m

$$Q^{\Pi+2m\rho} = Q^{\Pi},\ P^{\Pi+2m\rho} = P^{\Pi},\ \mu^{\Pi+2m\rho} = \mu^{\Pi}.$$

§. 234.

Macht man nun wiederum

$$\begin{aligned} p^{\circ} &= 1, & q^{\circ} &= 0 \\ p' &= \mu, & q' &= 1 \\ p'' &= \mu' p' + p^{\circ}, & q' &= \mu' q' + q^{\circ} \\ p''' &= \mu'' p'' + p', & q''' &= \mu'' q'' + q' \end{aligned}$$

u. ſ. w.

ſo erhält man die Reyhe von Brüchen $\frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}, \frac{p'''}{q'''}$... die ſich dem Werth von $\sqrt{k}$ abwechslungsweiſe als kleiner und gröſſer nähern, ſo daß zwiſchen zweyen derſelben kein Bruch von kleinerer Benennung fallen kan, der ſich dem Werth von $\sqrt{k}$ mehr näherte (§. 231. 3°.) Und da die Gröſſen $\frac{p'}{q'} - \sqrt{k}, \frac{p''}{q''} - \sqrt{k}, \frac{p'''}{q'''} - \sqrt{k}$... abwechſelnd negativ und poſitiv ſind, ſo ſind auch die Gröſſen $p' - q'\sqrt{k}$, $p'' - q''\sqrt{k}$, $p''' - q'''\sqrt{k}$... abwechſelnd negativ und poſitiv.

Man wird alsdenn weiter haben

$$\begin{aligned} Q^{\circ} &= 0 & P^{\circ} &= p^{\circ 2} - kq^{\circ 2} \\ Q' &= p^{\circ} p' - kq^{\circ} q', & P' &= p'^2 - kq'^2 \\ Q'' &= p' p'' - kq' q'', & P'' &= p''^2 - kq''^2 \\ Q''' &= p'' p''' - kq'' q''', & P''' &= p'''^2 - kq'''^2 \end{aligned}$$

u. ſ. w.

Denn vermöge der obigen Ausdrüke für P°, P', P''..., Q°, Q', Q''... ist

$$P^\circ = 1 = p^{\circ 2} - Kq^{\circ 2}$$
$$Q' = \mu = p^\circ p' - Kq^\circ q'$$
$$P' = \mu^2 - K = p'^2 - Kq'^2$$
$$Q'' = \mu' P' + Q' = \mu'(p'^2 - Kq'^2) + p''p' - Kq^\circ q'$$
$$= p'(\mu' p' + p^\circ) - Kq'(\mu' q' + q^\circ)$$
$$= p'p'' - Kq'q''$$

$$P'' = \frac{Q'^2 - K}{P'} = \frac{(\mu' P' + Q')^2 - K}{P'} = \mu'^2 P' + 2\mu' Q' + \frac{Q'^2 - K}{P'}$$
$$= \mu'^2 P' + 2\mu' Q' + 1$$
$$= \mu'^2(p'^2 - Kq'^2) + 2\mu' p^\circ p' + p^{\circ 2}$$
$$= (\mu' p' + p^\circ)^2 - K\mu'^2 q'^2 = p''^2 - Kq''^2$$
$$Q''' = \mu'' P'' + Q'' = \mu''(p''^2 - Kq''^2) + p'p'' - Kq'q''$$
$$= p''(\mu'' p'' + p') - Kq''(\mu'' q'' + q')$$
$$= p''p''' - Kq''q'''$$

$$P''' = \frac{Q''^2 - K}{P''} = \frac{(\mu'' P'' + Q'')^2 - K}{P''} = \mu''^2 P'' + 2\mu'' Q'' + \frac{Q''^2 - K}{P''}$$
$$= \mu''^2 P'' + 2\mu'' Q'' + P'$$
$$= \mu''^2(p''^2 - Kq''^2) + 2\mu''(p'p'' - Kq'q'') + p'^2 - Kq'^2$$
$$= (\mu'' p'' + p')^2 - K(\mu'' q'' + q')^2$$
$$= p'''^2 - Kq'''^2$$

Und so weiter.

Da nun die Größen $p^\circ - q^\circ\sqrt{K}$, $p' - q'\sqrt{K}$, $p'' - q''\sqrt{K}$... abwechslungsweise positiv und negativ sind; so sind auch die Größen $p^{\circ 2} - Kq^{\circ 2}$, $p'^2 - Kq'^2$, $p''^2 - Kq''^2$..., das ist, p°, p', p''... abwechslungsweise positiv und negativ.

Für das obige Beyspiel von $\sqrt{79}$ erhält man aus den

Größen	μ,	μ',	μ'',	μ''',	μ^{IV},	μ^V ....
	8,	1,	7,	1,	16,	1 ....

die Brüche $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{0}, \frac{8}{1}, \frac{9}{1}, \frac{71}{8}, \frac{80}{9}, \frac{1351}{152}, \frac{1431}{161}, \ldots, \\ \frac{P^\circ}{q^\circ}, \frac{P'}{q'}, \frac{P''}{q''}, \frac{P'''}{q'''}, \frac{P^{IV}}{q^{IV}}, \frac{P^V}{q^V}, \frac{P^{VI}}{q^{VI}}, \ldots, \end{array}\right.$

welche gegen den Werth von $\sqrt{79}$ convergiren; und man weiß aus obigem, daß sich zwischen $\frac{9}{1}$ und $\frac{71}{8}$ noch sechs, zwischen $\frac{80}{7}$ und $\frac{1351}{150}$ noch fünfzehen Zwischenbrüche einschalten lassen, u. s. w.

Und da man für dieses Beyspiel $P^\circ = 1$, $P' = -15$, $P'' = 2$ u. s. w. gefunden hat (§. 5.); so hat man

$$1^2 - 79 \cdot 0 = 1$$
$$8^2 - 79 \cdot 1^2 = -15$$
$$9^2 - 79 \cdot 1^2 = 2$$
$$71^2 - 79 \cdot 8^2 = -15$$
$$80^2 - 79 \cdot 9^2 = 1$$
u. s. w.

Aus der lezten Gleichung ergibt sich $\left(\frac{80}{9}\right)^2 = 79 + \frac{1}{9}^2$,

$$\frac{80}{9} = \sqrt{79} \times \sqrt{\left(1 + \frac{1}{9^2 \cdot 79}\right)}$$

Woraus man sieht, wie nahe der Bruch $\frac{80}{9}$ der Quadratwurzel von 79 kommt.

§. 235.

Ich werde nun beweisen, daß der stetige Bruch, der eine incommensurable Quadratwurzel ausdrüken soll, nothwendig periodisch seyn muß.

Da vermöge des eben bewiesenen die Größen P°, P', P'', P'''... abwechselnd positiv und negativ sind; so sind die Produkte P°, P', P', P'', P'', P'''... alle negativ; also die Größen $-P^\circ P'$, $-P'P''$, $-P''P'''$... positiv. Und da man (§. 233.) hatte

$$P' = \frac{Q'^2 - K}{P^\circ}, \text{ folglich } Q'^2 - P^\circ P' = K$$

und ebenso
$$Q''^2 - P'P'' = K$$
$$Q'''^2 - P''P''' = K$$
u. s. w.

so erhellt, daß die Größen Q', Q'', Q'''... nie größer seyn können, als $\sqrt{k}$; die Größen $-P^{\circ}P'$, $-P'P''$, $-P'P'''$... aber, und daher auch die Größen P°, P', P''... (von ihren Zeichen abgesehen) nicht größer seyn können als k. Daher denn die beyden Reyhen P', P'', P'''..., Q', Q'', Q'''... fortgesezt, so lang man will, nur aus einer gewissen endlichen Anzahl verschiedener Glieder bestehen können; welche Glieder nämlich für die erste Reyhe nur die Zahlen von 1 bis k positiv oder negativ genommen, für die zweyte nur die Zahlen von 1 bis $\sqrt{k}$ seyn können. Da demnach die Anzahl der verschiedenen möglichen Glieder in der einen und in der andern Reyhe, und folglich auch die Anzahl der verschiedenen möglichen Combinationen je zweyer Glieder von beyden Reyhen beschränkt ist; so müssen nothwendig irgend zwey correspondirende Glieder wie Q^{π}, P^{π}, in beyden Reyhen, wenn solche hinlänglich fortgesezt werden, mehrere male wieder mit einander zum Vorschein kommen, und zwar einmal so, daß sie bey ihrem Wiederkehren eine gerade Stelle, man seze die 2ρte, hinter derjenigen oder hinter einer von denjenigen einnehmen, welche sie vorher eingenommen hatten; daß also $Q^{\pi+2\rho} = Q^{\pi}$, $P^{\pi+2\rho} = P^{\pi}$ sey. Nun haben wir aber oben (§. 233.) bewiesen, daß alsdenn auch $\mu^{\pi+2\rho} = \mu^{\pi}$, und die folgenden Glieder der Reyhe $\mu^{\pi+1}$, $\mu^{\pi+2}$, $\mu^{\pi+3}$... nach einander in der Ordnung wieder vorkommen werden, und der stetige Bruch von μ^{π} an aus immer wiederholten Perioden von einer Anzahl 2ρ von Nennern bestehen wird. Folglich ist jeder stetige Bruch, der eine incommensurable Quadratwurzel ausdrüken soll, periodisch.

§. 236.

Die immer wiederkehrende Periode von Nennern des stetigen Bruchs bestand im obigen Beyspiel für $\sqrt{79}$ aus folgenden Gliedern

$$\begin{bmatrix} 1, & 7, & 1, & 16 \\ \mu', & \mu'', & \mu''', & \mu^{IV} \end{bmatrix},$$

es war nämlich $\mu^{v} = \mu'$, $\mu^{vi} = \mu''$ u. s. w.; diese Periode fieng also mit dem ersten Nenner μ an. Die Reyhe P°, P', P''... betreffend aber, fand sich ihre wiederkehrende Periode nicht erst mit dem Glied P', sondern schon mit dem Glied P° anfangend; nämlich $P^{iv} = P^{\circ}$, P^{v}, $= P'$ u. s. w. Ich behaupte, daß dis nothwendig statt habe: daß nämlich die wiederkehrende Periode der Nenner eines stetigen Bruchs, der irgend eine incommensurable Quadratwurzel $\sqrt{k}$ ausdrüken soll, mit dem ersten Nenner μ' anfange; die wiederkehrende Periode der auf die oben angezeigte Art für $\sqrt{k}$ formirten Größen P°, P', P''... aber schon mit P° anfange.

Dieses zu beweisen, bemerke ich

1°. Wenn für ein gegebenes K zwey correspondirende Glieder Q^{π}, P^{π} der Reyhen Q', Q'', Q'''... P', P'', P'''... gegeben sind; so sind auch alle Glieder der Reyhen

$$P^{\circ}, P', P'', P'''...P^{\pi-1}$$

und $\mu', \mu'', \mu'''...\mu^{\pi-1}$ gegeben.

Man seze, z. B. es seyen die Glieder Q^{iv}, P^{iv} gegeben.

Da $Q^{iv} - P'''P_{iv} = K$, und Q^{iv}, P^{iv}, K gegeben sind, so ist P''' gegeben.

Ferner weil $p^{iv} = \mu''' p''' + p''$, $q^{iv} = \mu''' q''' + q''$; so ist

$$\mu'''(p''' + q'''\sqrt{k}) = p^{iv} + q^{iv}\sqrt{k} - (p'' + q''\sqrt{k})$$

$$\text{folglich } \mu''' = \frac{p_{iv} + q_{iv}\sqrt{k}}{p''' - q'''\sqrt{k}} - \frac{p'' + q''\sqrt{k}}{p''' + q'''\sqrt{k}};$$

und da p'', q'' beziehungsweise kleiner sind als p''', q''' (§. 231.); so ist $\frac{p'' + q''\sqrt{k}}{p''' + q'''\sqrt{k}} < 1$. Folglich muß μ''' die ganze Zahl seyn, die unmittelbar kleiner ist als

$$\frac{p_{iv} + q_{iv}\sqrt{k}}{p_{iii} + q_{iii}\sqrt{k}}, \text{ d. i. } \frac{(p^{iv} + q^{iv}\sqrt{k})(p''' - q'''\sqrt{k})}{p'''^2 - Kq'''^2},$$

$$\text{d. i. } \frac{p'''p_{iv} - Kq'''q_{iv} - \sqrt{k}}{p'''^2 - Kq'''^2}, \text{ weil } p^{iv}q''' - q^{iv}p''' = 1,$$

$$\text{d. i. } \frac{Q^{iv} - \sqrt{k}}{P'''}$$

Mithin ist auch μ''' gegeben. Daher auch Q''', welches $= Q^{IV} - \mu'''P'''$; daher ferner P'', weil $Q'''^2 - P''P''' = K$. Und es läßt sich wiederum beweisen, daß μ'' die ganze Zahl seyn muß, die unmittelbar kleiner ist als $\frac{Q''' + \sqrt{k}}{P''}$; folglich ist auch μ'' gegeben; und daher Q'', welches $= Q''' - \mu''P''$; und P' gegeben, da $Q''^2 - P'P'' = K$. Und μ' ist wiederum die ganze Zahl, die zunächst kleiner ist als $\frac{Q'' + \sqrt{k}}{P'}$; folglich ist μ' gegeben; daher auch Q', welches $= Q'' - \mu'P'$; und P°, weil $Q'^2 - P^\circ P' = K$.

2°. Hieraus läßt sich leicht schliessen, daß, wenn

$$Q^{\pi+2\varrho} = Q^\pi \text{ und } P^{\pi+2\varrho} = P^\pi \text{ ist,}$$

auch die π vor $P^{\pi+2\varrho}$ vorhergehenden Glieder

$$P^{\pi+2\varrho-1}, \ldots\ldots P''^{+2\varrho}, P'^{+2\varrho}, P^{2\varrho}$$

den π vor P^π vorhergehenden

$$P^{\pi-1}, \ldots\ldots P'', P', P^\circ$$

beziehungsweise gleich sind; wie auch daß

die Glieder $\mu^{\pi+2\varrho-1}, \ldots\ldots \mu''^{+2\varrho}, \mu'^{+2\varrho}$

den Gliedern $\mu^{\pi-1}, \ldots\ldots \mu'', \mu'$

beziehungsweise gleich sind.

Denn die zuerst genannten Glieder können ganz ebenso aus den Größen $Q^{\pi+2\varrho}$ und $P^{\pi+2\varrho}$ abgeleitet werden, wie die leztgenannten aus den Größen Q^π und P^π (1°.) Nun sind aber vermöge der Voraussezung erstere Größen leztern gleich. Folglich sind auch die von ihnen abgeleiteten einander gleich.

Wenn demnach bey irgend zwey correspondirenden Gliedern P^π, Q^π, wo $\pi > 0$, der Fall eintritt, daß sie mit einander in einer geraden Stelle ihrer Reyhen hinter derjenigen, die sie ein vorhergehendes mal einnehmen, wiederkehren; so

muß

muß nothwendig vorher die ganze Periode P°, P', P'' .. bis P^{π} wiedergekehrt seyn; auch muß zu gleicher Zeit und correspondirend in der Reyhe der Grösen μ', μ'', μ''' ... die ganze Periode μ', μ'', ... $\mu^{\pi-1}$ von ihrem Anfang an wiedergekehrt seyn.

Nun muß aber gedachter Fall nothwendig eintreten, wenn, wie wir hier vorausseżen, von einem continuirlichen Bruch die Rede ist, der eine incommensurable Quadratwurzel ausdrüken soll; vermöge dessen, was im vorhergehenden §. gesagt worden ist.

Folglich ist der Anfang der genannten Perioden so beschaffen, wie wir behauptet haben.

Zusaz. Man hat demnach, wenn 2ρ wie bisher die Anzahl der Glieder der Periode bedeutet, die Grösen $P^{2\rho}$, $P^{4\rho}$, $P^{6\rho}$ ... und allgemein für jede ganze Zahl m, $P^{2m\rho} = P^{\circ} = 1$. Nun ist allgemein $P\lambda = p\lambda^2 - Kq\lambda^2$ (§. 234). Folglich läßt sich der Gleichung $P^2 - Kq^2 = 1$ auf unzählige Arten durch ganze Zahlen Genüge leisten, indem man für p, q irgend zwey correspondirende Werthe $p^{2m\rho}$, $q^{2m\rho}$ nimmt. Wir werden nachher zeigen, daß, wenn man die kleinsten derselben p , $q^{2\rho}$ kennt, die übrigen alle sich daraus finden lassen, ohne daß man nöthig hat, durch die Berechnung der Zwischenglieder $p^{2\rho+1}$, $p^{2\rho+2}$.., $q^{2\rho+1}$, $q^{2\rho+2}$.. zu denselben fortzugehen.

Zu Auflösung der Gleichung $p^2 - 79q^2 = 1$ hat man
Werthe von p ... $p^{IV} = 80$, p^{VIII}, p^{XII}, p^{XVI} ...
Werthe von q ... $q^{IV} = 9$, q^{VIII}, q^{XII}, q^{XVI} ...

§. 237.

Für das Beyspiel von $\sqrt{79}$ (§. 233.) kamen in der Periode P°, P', P'' ... die Zahlen 1 und 2 vor: daher von der Gleichung $p^2 - 79q^2 = 1$, wie eben bemerkt worden, und ebenso von der Gleichung $p^2 - 79q^2 = 2$ unzählige Auf-

lösungen möglich sind. Da aber von den Zahlen 1, 2, 3... 8, die kleiner als $\sqrt{79}$ sind, die ebengenannten 1 und 2 positiv genommen die einzigen sind, die in jener Periode vorkommen; so behaupte ich, daß von allen Gleichungen von der Form $p^2 - 79q^2 = \pm H$, wo H kleiner ist als $\sqrt{79}$, sich ausser den zwey genannten sonst keine auflösen lasse, das ist, daß von den Gleichungen

$$p^2 - 79q^2 = \pm 1,$$
$$p^2 - 79q^2 = \pm 2$$
$$p^2 - 79q^2 = \pm 3$$
$$\vdots$$
$$p^2 - 79q^2 = \pm 8$$

nur die beyden ersten mit dem positiven Zeichen aufgelöst werden können.

Allgemein: Sey K irgend eine Zahl, die keine Quadratzahl ist, und es seyen für dieselbe die Glieder der Reyhe $P^\circ, P', P'' \ldots$ nach dem in §. 233. gelehrten Verfahren bis zum Ablauf der Periode gebildet, und es sey H irgend eine gegebene ganze positive Zahl, die kleiner ist als $\sqrt{K}$; so behaupte ich: daß, wenn sich die Gleichung $p^2 - Kq^2 = \pm H$ in ganzen Zahlen auflösen läßt, die Größe $\pm H$ eines von den Gliedern (P_λ) der Periode $P^\circ, P', P'' \ldots$ seyn müsse; oder, welches auf dasselbe hinauslauft (da man allgemein hat $P_\lambda = p_\lambda^2 - Kq_\lambda^2$, und $\frac{p_\lambda}{q_\lambda}$ einer von den Hauptbrüchen ist, die gegen den Werth von $\sqrt{K}$ convergiren) daß die Zahlen p, q so beschaffen seyn müssen, daß $\frac{p}{q}$ einer von den Hauptbrüchen sey, die gegen $\sqrt{K}$ convergiren.

Erster Fall. Es sey $p^2 - Kq^2 = H$.

So ist $p^2 > Kq^2 > q^2$, und $p > q$. Man suche (§. 230.) die Quotienten $\mu, \mu', \mu'' \ldots$ zu Bestimmung eines stetigen Bruchs, der dem Bruch $\frac{p}{q}$ gleich sey; und der lezte

Nenner nehme eine gerade Stelle in der Reyhe μ, μ', μ''.. ein, welches vermöge dessen, was §. 231. 5°. gesagt worden, immer geschehen kann: er sey z. B. μ'''. Man bilde aus diesen Quotienten die Hauptbrüche $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'''}{q'''}$, $\frac{p_{IV}}{q^{IV}}$, deren lezter $= \frac{p}{q}$ ist, nämlich $p^{IV} = p$, $q^{IV} = q$. So ist $p^{IV}q''' - q^{IV}p''' = 1$ (§. 231.) Nun behaupte ich:

1°. Daß die Größe $q'''\sqrt{k} - p'''$ positiv und größer seyn wird als $p^{IV} - q^{IV}\sqrt{k}$, d. i., $p - q\sqrt{k}$, welche leztere ebenfalls positiv ist, weil $p^2 - Kq^2 = H$.

Denn da $p^{IV2} - Kq^{IV2} = H < \sqrt{K}$, und daher $p^{IV} > q^{IV}\sqrt{K}$; so ist $p^{IV} - q^{IV}\sqrt{K} < \frac{\sqrt{k}}{p^{IV} + q^{IV}\sqrt{k}} < \frac{\sqrt{k}}{2q^{IV}\sqrt{k}}$, d. i. $< \frac{1}{2q^{IV}}$,

und noch vielmehr $< \frac{1}{2q'''}$, weil $q''' < q^{IV}$;

folglich $p^{IV}q''' - q'''q^{IV}\sqrt{k} < \frac{1}{2}$

$q'''q^{IV}\sqrt{k} + \frac{1}{2} > p^{IV}q'''$

$q^{IV}(q'''\sqrt{k} - p''') + \frac{1}{2} > p^{IV}q''' - q^{IV}p'''$, das ist, 1

$q^{IV}(q'''\sqrt{k} - p''') > \frac{1}{2}$

$q'''\sqrt{k} - p''' > \frac{1}{2q^{IV}}$, also positiv

Nun war $p^{IV} - q^{IV}\sqrt{k} < \frac{1}{2q^{IV}}$

folglich ist $q'''\sqrt{k} - p''' > p^{IV} - q^{IV}\sqrt{k}$.

2°. Aus den Formeln $p^{IV} = \mu'''p''' + p''$, $q^{IV} = \mu'''q''' + p''$ ergibt sich $p^{IV} - q^{IV}\sqrt{k} + \mu'''(q'''\sqrt{k} - p''') = p'' - q''\sqrt{k}$

daher $\frac{p'' - q''\sqrt{k}}{q'''\sqrt{k} - q'''} = \mu''' + \frac{p^{IV} - q^{IV}\sqrt{k}}{q'''\sqrt{k} - p''}$

Ebenso findet sich

$$\frac{q'\sqrt{k} - p'}{p'' - q''\sqrt{k}} = \mu'' + \frac{q'''\sqrt{k} - p'''}{p'' - q'\sqrt{q}}$$

und $$\frac{p^{\circ} - q^{\circ}\sqrt{k}}{q'\sqrt{k} - p'} = \mu' + \frac{p'' - q''\sqrt{k}}{q'\sqrt{k} - p'}$$

Endlich ist $\sqrt{k} = \mu + (\sqrt{k} - \mu) = \mu + \frac{q'\sqrt{k} - p'}{p_o - q_o\sqrt{k}}$

Da nun vermöge der Construction μ, μ', μ'', μ''' po-

sitive Zahlen sind; und nach dem bewiesenen $q'''\sqrt{k}-p''' > p^{iv}-q^{iv}\sqrt{k}$, und beyde positiv; daher die Größe $\frac{q'''\sqrt{k}-p'''}{p^{iv}-q^{iv}\sqrt{k}}$ größer als 1 und positiv ist; man nenne sie a^{iv}; so folgt vermöge der so eben gefundenen Ausdrüke, daß auch die Größen $\frac{p''-q''\sqrt{k}}{q'''\sqrt{k}-p'''}$, $\frac{q'\sqrt{k}-p'}{p''-q''\sqrt{k}}$, $\frac{p_o-q^o\sqrt{k}}{q'\sqrt{k}-p'}$ positiv und > 1 sind. Nennt man sie beziehungsweise

a''', a'', a';

so hat man

$$\sqrt{k}=\mu+\frac{1}{a'},\quad a'=\mu'+\frac{1}{a''},\quad a''=\mu''+\frac{1}{a'''},\quad a'''=\mu'''+\frac{1}{a_{iv}};$$

woraus erhellt, daß der stetige Bruch $\mu+\frac{1}{\mu'+\frac{1}{\mu''+\frac{1}{\mu'''+}}}$

der Anfang eines stetigen Bruchs ist, der die Größe $\sqrt{K}$ durch Näherung ausdrükt, oder daß der ihm gleiche $\frac{p}{q}$ einer der Hauptbrüche ist, welche gegen den Werth von $\sqrt{K}$ convergiren.

Zweyter Fall. Es sey $p^2-Kq^2=-H$, oder $Kq^2-p^2=H$.

So ist $p^2=Kq^2-H=q^2\left(K-\frac{H}{q^2}\right) > q^2$; folglich $p > q$.

Man suche wiederum einen continuirlichen Bruch $\mu+\frac{1}{\mu'+\frac{1}{\mu''+}}$ u. s. w., welcher der Größe $\frac{p}{q}$ gleich sey, und die Anzahl der Größen μ, μ', μ'' ... sey ungerade, welches immer geschehen kan (§. 231. 5°.); die lezte derselben sey z. B. μ^{iv}. Man bilde daraus die Hauptbrüche $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$ ... $\frac{p^v}{q^v}$. So ist $p^v=p$, $q^v=q$; und $p^{iv}q^v-q^{iv}p^v=1$.

Man hat also $Kq^{v\,2}-p_v{}^2=H$; und $q^v\sqrt{K} > p^v$; ferner $\sqrt{K} < H$ (Voraussf.) daher

$$q^v\sqrt{k}-p_v=\frac{H}{q^v\sqrt{k}+p_v} < \frac{\sqrt{k}}{q^v\sqrt{k}+p^v} < \frac{\sqrt{k}}{q^v\sqrt{k}} \text{ d. i. } < \frac{1}{q} < \frac{1}{q^v}$$

folglich $q^{IV}(q^V\sqrt{k}-p^V) < 1$, das ist, $p^{IV}q_V - q^{IV}p_V$
daher $q^V\sqrt{k}$ und um so mehr $q^{IV}\sqrt{k} < p^{IV}$; also $p^{IV}-q^{IV}\sqrt{k}$ positiv.

Es wird aber auch $p^{IV}-q^{IV}\sqrt{k}$ größer seyn als $q^V\sqrt{k}-p_V$.

Denn da $p^V > p^{IV} > q^{IV}\sqrt{k} > q^{IV}H$

und $q^V\sqrt{k} > q^VH$

so ist $p^V + q^V\sqrt{k} > (q^{IV}+q^V)H$, d. i. $(q^{IV}+q^V)(Kq_V^2-p^V)$
folglich $1 > (q^{IV}+q^V)(q^V\sqrt{k}-p^V)$

und $1 - q^{IV}q^V\sqrt{k} + q^{IV}p_V$
das ist $q^V(p^{IV}-q^{IV}\sqrt{k})$ $\Big\} > q^V(q^V\sqrt{k}-p^V)$

also $p^{IV}-q^{IV}\sqrt{k} > q^V\sqrt{k}-p^V$.

Man wird alsdenn ebenso wie beym vorhergehenden Fall beweisen, daß, wie

$\frac{p^{IV}-q^{IV}\sqrt{k}}{q^V\sqrt{k}-p^V}$, so $\frac{q'''\sqrt{k}-p'''}{p^{IV}-q^{IV}\sqrt{k}}$, $\frac{p''-q''\sqrt{k}}{q'''\sqrt{k}-p'''}$, $\frac{q'\sqrt{k}-p'}{p''-q''\sqrt{k}}$, $\frac{p^\circ-q^\circ\sqrt{k}}{q'\sqrt{k}-p'}$

positiv und > 1 seyen; und wenn man diese Größen beziehungsweise

a^V, a^{IV}, a''', a'', a' nennt,

$\sqrt{k} = \mu + \frac{1}{a'}$, $a' = \mu' + \frac{1}{a''}$, $a'' = \mu'' + \frac{1}{a'''}$, $a''' = \mu''' + \frac{1}{a^{IV}}$,

$a^{IV} = \mu^{IV} + \frac{1}{a^V}$ sey;

woraus das behauptete folgt.

Zusaz. Wenn man demnach eine Gleichung von der Form $p^2 - Kq^2 = \pm H$, wo $H < \sqrt{K}$ ist, in ganzen Zahlen aufzulösen hat; so hat man nur aus $\sqrt{K}$ die Größen P°, P' P''... bis zum Ablauf eine Periode zu suchen; und wenn man darunter ein Glied $P\lambda = \pm H$ findet, so hat man die gesuchte Auflösung, indem man $p = p\lambda$, $q = q\lambda$ macht; wo nicht, so kan man versichert seyn, daß die vorgelegte Gleichung durchaus keine Auflösung in ganzen Zahlen zuläßt.

§. 238.

Aufgabe. Es ist eine quadratische Gleichung gegeben, deren Wurzeln möglich und positiv sind. Man soll dieselbe durch stetige Brüche ausdrüken.

Es sey z. B. die gegebene Gleichung $9x^2 - 118x + 378 = 0$

So ist mithin $9^2x^2 - 2.9.59x + 3402 = 0$

$$\left.\begin{matrix}(9x-59)^2 \\ \end{matrix}\begin{matrix}-3481 \\ +3502\end{matrix}\right] = 0$$

das ist, $(9x-59)^2 - 79 = 0$

daher $x = \frac{59 \pm \sqrt{79}}{9}$

Ich nehme zuerst die Wurzel, welche dem obern Zeichen entspricht, und indem ich nach der Anmerkung zu §. 230. verfahre, erhalte ich

$$\frac{59+\sqrt{79}}{9} = 7 + \frac{\sqrt{79}-4}{9} = 7 + \frac{63}{9(\sqrt{79}+4)} = 7 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+4}{7}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{79}+4}{7} = 1 + \frac{\sqrt{79}-3}{7} = 1 + \frac{70}{7(\sqrt{79}+3)} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+3}{10}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{79}+3}{10} = 1 + \frac{\sqrt{79}-7}{10} = 1 + \frac{30}{10(\sqrt{79}+7)} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+5}{3}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{79}+7}{3} = 5 + \frac{\sqrt{79}-8}{3} = 5 + \frac{15}{3(\sqrt{79}+8)} = 5 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+8}{5}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{79}+8}{5} = 3 + \frac{\sqrt{79}-7}{5} = 3 + \frac{30}{5(\sqrt{79}+7)} = 3 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+7}{6}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{79}+7}{6} = 2 + \frac{\sqrt{79}-5}{6} = 2 + \frac{54}{6(\sqrt{79}+5)} = 2 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+5}{9}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{79}+5}{9} = 1 + \frac{\sqrt{79}-4}{9} = 1 + \frac{63}{9(\sqrt{79}+4)} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+4}{7}\right)}$$

Daher $\frac{59+\sqrt{79}}{9} = 7 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+4}{7}\right)}$

$= 7 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{\sqrt{79}+4}{7}}}}}}}$

wobey man sieht, daß, wenn man statt des lezten vollständigen Nenners die Näherungen in ganzen Zahlen fortsezt, die Periode der Nenner 1, 1, 5, 3, 2, 1 wieder anfangen, und ohne Ende wiederkommen wird.

Man erhält aus diesem stetigen Bruch folgende Hauptbrüche, die gegen den Werth von $\frac{59+\sqrt{79}}{9}$ convergiren:

(7, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5 . . .)

$\frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{15}{2}, \frac{83}{11}, \frac{264}{35}, \frac{611}{81}, \frac{875}{116}, \frac{1486}{197}, \frac{2361}{313}, \frac{13291}{1762} \cdot \cdot \cdot$

Ich nehme nun die zweyte Wurzel, und erhalte durch ähnliches Verfahren

$\frac{59-\sqrt{79}}{9} = 5 + \frac{14-\sqrt{79}}{9} = 5 + \frac{117}{9(14+\sqrt{79})} = 5 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+14}{13}\right)}$

$\frac{\sqrt{79}+14}{13} = 1 + \frac{\sqrt{79}+1}{13} = 1 + \frac{78}{13(\sqrt{79}-1)} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}-1}{6}\right)}$

$\frac{\sqrt{79}-1}{6} = 1 + \frac{\sqrt{79}-7}{6} = 1 + \frac{30}{6(\sqrt{79}+7)} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+7}{5}\right)}$

$\frac{\sqrt{79}+7}{5} = 3 + \frac{\sqrt{79}+8}{5} = 3 + \frac{15}{5(\sqrt{79}+8)} = 3 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+8}{3}\right)}$

$\frac{\sqrt{79}+8}{3} = 5 + \frac{\sqrt{79}-7}{5} = 5 + \frac{30}{3(\sqrt{79}+7)} = 5 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+7}{10}\right)}$

$\frac{\sqrt{79}+7}{10} = 1 + \frac{\sqrt{79}-3}{10} = 1 + \frac{70}{10(\sqrt{79}+3)} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+3}{7}\right)}$

$$\frac{\sqrt{79}+3}{7} = 1 + \frac{\sqrt{79}-4}{7} = 1 + \frac{63}{7(\sqrt{79}+4)} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+4}{9}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{79}+4}{9} = 1 + \frac{\sqrt{79}+5}{9} = 1 + \frac{54}{9(\sqrt{79}+5)} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+5}{6}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{79}+5}{6} = 2 + \frac{\sqrt{79}-7}{6} = 2 + \frac{30}{6(\sqrt{79}+7)} = 2 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+7}{5}\right)}$$

Daher $\frac{59-\sqrt{79}}{9} = 5 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+7}{5}\right)}$

$$= 5 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{79}+7}{5}\right)}$$

wo demnach die Periode aus den Gliedern 3, 5, 1, 1, 1, 2 bestehen wird.

Hauptbrüche, die gegen $\frac{59-\sqrt{79}}{9}$ convergiren:

(5, 1, 1, 3, 5, 1, 1, 1, 2, 3, 5 ...)

$\frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{11}{2}, \frac{39}{7}, \frac{206}{37}, \frac{245}{44}, \frac{451}{81}, \frac{696}{125}, \frac{1843}{331}, \frac{6225}{1118}, \frac{32968}{5921}$ ...

Ist eine quadratische Gleichung gegeben, deren eine Wurzel a oder auch beyde negativ sind; so kan man in ihrem Ausdruk die Zeichen verändern, und alsdenn den Werth -a in einem stetigen Bruch ausdrüken.

Allgemein. Es sey eine quadratische Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$, deren Wurzeln reell und positiv sind; man soll dieselbe durch stetige Brüche ausdrüken.

Da die Wurzeln reell seyn sollen; so muß $B^2 > 4AC$ seyn: Man findet alsdenn, $B^2 - 4AC = E$ gesezt, die Wurzeln $= \frac{-\frac{1}{2}B \pm \frac{1}{2}\sqrt{E}}{A}$.

Ich nehme diejenige, die dem obern Zeichen entspricht, und seze

$\frac{-\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{A} = a = \frac{-Q^\circ+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^\circ}$; nämlich $\frac{1}{2}B = Q^\circ$, $A = P^\circ$.

Nun ist für jedes μ

$$\frac{-Q^\circ+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^\circ} = \mu + \frac{-(\mu P^\circ+Q^\circ)+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^\circ} = \mu + \frac{-Q'+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^\circ}$$

$$= \mu + \frac{Q'^2-\frac{1}{4}E}{P^\circ\times(-Q'-\frac{1}{2}\sqrt{E})}$$

$$= \mu + \frac{1}{\left(\frac{-Q'-\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P'}\right)}$$; indem man

$\mu P^\circ + Q^\circ = Q'$

$\frac{Q'^2-\frac{1}{4}E}{P^\circ} = P'$ sezt.

Ebenso ist für jede μ', μ'', μ''' . . .

$\frac{-Q'-\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P'} = \mu' + \frac{1}{\left(\frac{-Q''+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P''}\right)}$; $\mu' P' + Q' = Q''$; $\frac{Q''^2-\frac{1}{4}E}{P'} = P''$ gesezt

$\frac{-Q''+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P''} = \mu'' + \frac{1}{\left(\frac{-Q'''-\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P'''}\right)}$; $\mu'' P'' + Q'' = Q'''$; $\frac{Q'''^2-\frac{1}{4}E}{P''} = P'''$ . . .

$\frac{-Q'''-\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P'''} = \mu''' + \frac{1}{\left(\frac{-Q^{IV}+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{IV}}\right)}$; $\mu''' P''' + Q''' = Q^{IV}$; $\frac{Q^{IV2}-\frac{1}{4}E}{P'''} = P^{IV}$ . . .

u. s. w.

Und da nach der Voraussezung $\frac{-Q^\circ+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^\circ}$ positiv ist; so werden, wenn man für μ, μ', μ'', μ''' . . . immer die ganzen Zahlen nimmt, welche unmittelbar kleiner als die respectiven ersten Glieder der vorhergehenden Gleichungen sind, auch diese ersten Glieder sowohl als die Größen μ, μ', μ'', μ''' . . . alle positiv seyn. Und man erhält, wenn man z. B. bey der lezten der hier gesezten Gleichungen stehen bleibt,

die Wurzel a genau gleich dem continuirlichen Bruche

$$\mu + \frac{1}{\mu' + \frac{1}{\mu'' + \frac{1}{\mu''' + \frac{1}{\left(\frac{-Q^{IV} + \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{IV}}\right)}}}}$$

Sezt man $\frac{-Q^{IV}+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{IV}} = Z$, und bildet aus den

Größen $\mu, \mu', \mu'', \mu''', Z$

die Hauptbrüche $\frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}, \frac{p'''}{q'''}, \frac{p^{IV}}{q^{IV}}, \frac{p^{IV}Z+p'''}{q^{IV}Z+q'''}$;

so ist der lezte von diesen $= a$; und man erhält hieraus

$$Z, \text{ das ist } \frac{-Q^{IV}+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{IV}} = \frac{aq''' - p'''}{p^{IV} - aq^{IV}}$$

$$= -\frac{\left(p''' + \frac{B}{2A}q''' - \frac{\sqrt{E}}{2A}q'''\right)}{p^{IV} + \frac{B}{2A}q^{IV} - \frac{\sqrt{E}}{2A}q^{IV}}$$

$$= \frac{-(Ap''' + \frac{1}{2}Bq''' - \frac{1}{2}\sqrt{E}.q''')(Ap^{IV} + \frac{1}{2}Bq^{IV} + \frac{1}{2}\sqrt{E}.q^{IV})}{(Ap^{IV} + \frac{1}{2}Bq^{IV} - \frac{1}{2}\sqrt{E}.q^{IV})(Ap^{IV} + \frac{1}{2}Bq^{IV} + \frac{1}{2}\sqrt{E}.q^{IV})}$$

$$= \frac{-(A^2p'''p^{IV} + \frac{1}{2}AB(p'''p^{IV} + q'''q^{IV}) + \frac{B^2-E}{4}q'''q^{IV} + \frac{1}{2}A\sqrt{E}.(p^{IV}q''' - q^{IV}p'''))}{A^2p^{IV2} + ABp^{IV}q^{IV} + \frac{B^2-E}{4}q^{IV2}}$$

$$= \frac{-(Ap'''p^{IV} + \frac{1}{2}B(p'''q^{IV} + q'''q^{IV}) + Cq'''q^{IV}) + \frac{1}{2}\sqrt{E}}{Ap^{IV2} + Bp^{IV}q^{IV} + Cq^{IV2}}$$

Man hat also $Q^{IV} = Ap'''p^{IV} + \frac{1}{2}B(p'''q^{IV} + q'''p^{IV}) + Cq'''q^{IV}$

$$P^{IV} = Ap^{IV2} + Bp^{IV}q^{IV} + Cq^{IV2}$$

Und ebenso kan man erhalten, $p^\circ = 1$, $q^\circ = 0$ gesezt,

$Q' = Ap^\circ p' + \frac{1}{2}B(p^\circ q' + q^\circ p') + Cq^\circ q'$

$Q'' = Ap'p'' + \frac{1}{2}B(p'q'' + q'p'') + Cq'q''$

$Q''' = Ap''p''' + \frac{1}{2}B(p''q''' + q''p''') + Cq''q'''$ u. s. w.

$$P^{\circ} = Ap^{\circ 2} + Bp^{\circ}q^{\circ} + Cq^{c\,2}$$
$$P' = Ap'^{2} + Bp'q' + Cq'^{2}$$
$$P'' = Ap''^{2} + Bp''q'' + Cq''^{2}$$
$$P''' = Ap'''^{2} + Bp'''q''' + Cq'''^{2}$$

u. ſ. w.

welches man auch durch eine der in §. 233. vorgenommenen ähnliche Entwiklung finden würde.

Nun läßt ſich ferner beweiſen, daß die Glieder der Reyhe P°, P', P''... von einem gewiſſen Glied, z. B. P^{λ}, an abwechslungsweiſe poſitiv und negativ ſeyn werden; woraus denn, wie oben §. 235. folgen wird, daß die folgenden Glieder dieſer Reyhe, ſo wie die correſpondirenden in der Reyhe Q°, Q', Q''... gewiſſe Grenzen nicht überſchreiten können; daher auch die Anzahl der möglichen verſchiedenen Combinationen je zweyer correſpondirenden Glieder dieſer beyden Reyhen endlich ſeyn wird, und irgend ein paar ſolcher Glieder Q^{π}, P^{π} bey fortgeſezten Reyhen wieder mit einander zum Vorſchein kommen, folglich der continuirliche Bruch periodiſch ſeyn muß; ferner daß, wenn P^{λ} und $P^{\lambda+1}$ die erſten Glieder ſind, welche verſchiedene Zeichen haben, das Glied $P^{\lambda+1}$ und auch alle folgenden nach einer gewiſſen Anzahl von Zwiſchengliedern wieder vorkommen werden, und auch das Glied P^{λ} in dem Fall, wenn man hat $\frac{\pm P^{\lambda}}{P^{\lambda+1}} =$ oder < 1. Man findet den Beweis in Lagrange's Zuſäzen zu Eulers Algebra, Art. 36. Auch läßt ſich, mit Ausnahme eines beſondern Falls, erweiſen, daß, wenn die Gleichung $Ap^2 + Bpq + Cq^2 = \pm H$, wo $H < \frac{1}{2}\sqrt{E}$, ſich in ganzen Zahlen auflöſen läßt, die Größe $\pm H$ ein Glied der Reyhe P°, P', P''... ſeyn müſſe. (Eſſai ſur la Théorie des nombres par Le Gendre, §. XII.) Ich verweiſe Kürze halber auf die in den angeführten Stellen enthaltenen Beweiſe: man wird ſich nach den oben für den ſpeciellern Fall

incommensurabler Quadratwurzeln vorgenommenen Erörterungen desto leichter in jene finden können.

Anwendung auf obiges Beyspiel $\frac{59 \pm \sqrt{79}}{9}$

für das obere Zeichen erhält man

$Q^\circ = -59, \quad P^\circ = 9, \quad \mu < \frac{59+\sqrt{79}}{9} = 7$

$Q' = 9 \cdot 7 - 59 = 4, \; P' = \frac{4^2-79}{9} = -7, \; \mu' < \frac{-4-\sqrt{79}}{-7} = 1$

$Q'' = -7 \cdot 1 + 4 = -3, \; P'' = \frac{3^2-79}{-7} = 10, \; \mu'' < \frac{3+\sqrt{79}}{10} = 1$

$Q''' = 10 \cdot 1 - 3 = 7, \; P''' = \frac{7^2-79}{10} = -3, \; \mu''' < \frac{-7-\sqrt{79}}{-3} = 5$

$Q^{IV} = -3 \cdot 5 + 7 = -8, \; P^{IV} = \frac{8^2-79}{-3} = 5, \; \mu^{IV} < \frac{8+\sqrt{79}}{5} = 3$

$Q^V = 5 \cdot 3 - 8 = 7, \; P^V = \frac{7^2-79}{5} = -6, \; \mu^V < \frac{-7-\sqrt{79}}{-6} = 2$

$Q^{VI} = -6 \cdot 2 + 7 = -5, \; P^{VI} = \frac{5^2-79}{-6} = 9, \; \mu^{VI} < \frac{5+\sqrt{79}}{9} = 1$

$Q^{VII} = 9, 1 - 5 = 4, \; P^{VII} = \frac{4^2-79}{9} = -7, \; \mu^{VII} < \frac{-4-\sqrt{79}}{-7} = 1$

u. s. w.

Man hat $Q^{VII} = Q'$, $P^{VII} = P'$; und die Periode in P°, P', P''... fängt schon mit dem ersten Glied an, in μ, μ', μ''... aber mit dem zweyten.

Und vermöge der oben schon gefundenen Hauptbrüche hat man

$9 \cdot 7^2 - 118 \cdot 7 \cdot 1 + 378 \cdot 1^2 = -7$

$9 \cdot 8^2 - 118 \cdot 8 \cdot 1 + 378 \cdot 1^2 = 10$

$9 \cdot 15^2 - 118 \cdot 15 \cdot 2 + 378 \cdot 2^2 = -3$

$9 \cdot 83^2 - 118 \cdot 11 \cdot 83 + 378 \cdot 11^2 = 5$

u. s. w.

Für das untere Zeichen erhält man

$Q^\circ = -59$, $P^\circ = 9$, $\mu < \frac{59-\sqrt{79}}{9} = 5$

$Q' = 9 \cdot 5 - 59 = -14$, $P' = \frac{14^2-79}{9} = 13$, $\mu' < \frac{14+\sqrt{79}}{13} = 1$

$Q'' = 13 \cdot 1 - 14 = -1$, $P'' = \frac{1^2-79}{13} = -6$, $\mu'' < \frac{1-\sqrt{79}}{-6} = 1$

$Q''' = -6 \cdot 1 - 1 = -7$, $P''' = \frac{7^2-79}{-6} = 5$, $\mu''' < \frac{7+\sqrt{79}}{5} = 3$

$Q^{IV} = 5 \cdot 3 - 7 = 8$, $P^{IV} = \frac{8^2-79}{5} = -3$, $\mu^{IV} < \frac{-8-\sqrt{79}}{-3} = 5$

$Q_V = -3 \cdot 5 + 8 = -7$, $P^V = \frac{7^2-79}{-3} = 10$, $\mu^V < \frac{7+\sqrt{79}}{10} = 1$

$Q^{VI} = 10 \cdot 1 - 7 = 3$, $P^{VI} = \frac{3^2-79}{10} = -7$, $\mu^{VI} < \frac{-3-\sqrt{79}}{-7} = 1$

$Q^{VII} = -7 \cdot 1 + 3 = -4$, $P^{VII} = \frac{4^2-79}{-7} = 9$, $\mu^{VII} < \frac{4+\sqrt{79}}{9} = 1$

$Q^{VIII} = 9 \cdot 1 - 4 = 5$, $P^{VIII} = \frac{5^2-79}{9} = -6$, $\mu^{VIII} < \frac{-5-\sqrt{79}}{-6} = 2$

$Q^{IX} = -6 \cdot 2 + 5 = -7$, $P^{IX} = \frac{7^2-79}{-6} = 5$, $\mu^{IX} < \frac{7+\sqrt{79}}{5} = 3$

u. ſ. w.

Die Periode bey den Größen μ, μ', μ''... fängt mit dem vierten, bey den Größen P°, P', P''... mit dem dritten Gliede an.

Und man kan ſchlieſſen, indem man die Glieder der Reyhen P°, P', P''... für das obere und untere Zeichen betrachtet, daß von allen Formeln $9p^2 - 118pq + 378q^2 = H$, wo H eine poſitive oder negative Zahl bedeutet, die $< \sqrt{79}$ iſt, nur die drey auflösbar ſind, da $H = -3$, 5 oder -7 iſt.

§. 239.

Nachdem wir geſehen haben, daß jede incommenſurable Quadratwurzel und allgemeiner, jede Wurzel einer quadratiſchen Gleichung ſich durch einen ſtetigen Bruch ausdrükken läßt, der nothwendig periodiſch iſt; ſo wollen wir nun

umgekehrt zeigen, daß jeder periodische stetige Bruch der Wurzel einer quadratischen Gleichung gleich sey, und wie diese gefunden werden könne.

Es sey, um bey den bisherigen Beyspielen zu bleiben,

1°. Der stetige Bruch $8+\frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{1}{16+\frac{1}{1+\frac{1}{7}+}}}}}$ u. s. w.

wo die Periode aus den Gliedern 1, 7, 1, 16 besteht.

Man seze seinen Werth = x; so hat man

$$x = 8+\frac{1}{y};\ \frac{1}{y} = x-8$$

$$y = 1+\frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{1}{16+\frac{1}{y}}}}$$

Macht man aus den Größen 1, 7, 1, 16, y

die Hauptbrüche $\frac{1}{1}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{152}{135}, \frac{152y+9}{135y+8}$;

so ist der lezte derselben $\frac{152y+9}{135y+8} = 1+\frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{1}{16+\frac{1}{y}}}} = y$;

daher $152y+9 = 135y^2+8y$

$$144y+9 = 135y^2$$

$$9\times\frac{1}{y^2}+144\times\frac{1}{y} = 135$$

$$9(x-8)^2+144(x-8) = 135$$

$$(x-8)^2+16(x-8) = 15$$

$$(x-8)(x+8) = x^2-64 = 15$$

$x^2 = 79$, $x = \sqrt{79}$; welches mit §. 233. übereinstimmt.

2°. Es sey der stetige Bruch $7+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{5+}}}}}}}}}$ u. s. w.

gegeben; dessen Periode ist 1, 1, 5, 3, 2, 1.

Man

Man seze seinen Werth $= x = 7 + \frac{1}{y}$

so ist $y = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{y}}}}}}$

Man bilde aus 1, 1, 5, 3, 2, 1, y

wiederum die Hauptbrüche $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{11}{6}, \frac{35}{19}, \frac{81}{44}, \frac{116}{63}, \frac{116y+81}{63y+44}$;

so hat man $y = \frac{116y+81}{63y+44}$

$$116y+81 = 63y^2+44y \qquad = x$$
$$72y+81 = 63y^2$$
$$8y+9 = 7y^2$$
$$9\times\frac{1}{y^2}+8\times\frac{1}{y} = 7$$
$$9(x-7)^2+8(x-7) = 7$$
$$(x-7)(9x-55) = 9x^2-118x+7.55=7$$
$$9x^2-2\cdot 79x = -7\cdot 54$$
$$(9x-59)^2 = 59^2-9\cdot 7\cdot 54=79$$

$x = \frac{59+\sqrt{79}}{9}$; welches mit §. 238. übereinstimmt.

3°. Es sey der stetige Bruch

$$5+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}}}}}}} + \text{u. s. w.}$$

gegeben, dessen Periode mit dem Nenner 3 anfängt, und bis zum Nenner 2 geht.

Man seze $x = 5+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{y}}}$

so daß $y = 3+\frac{1}{5+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{y}}}}}}$;

und man findet, indem man die Hauptbrüche bildet,

$$x = \frac{11y+6}{2y+1}$$

$$y = \frac{143y+54}{45y+17}$$

Daher $143y+54 = 45y^2+17y$

$126y+54 = 45y^2$

$14y+6 = 5y^2$

$(5y-7)^2 = 7^2+5\cdot 6 = 79$

$$y = \frac{7+\sqrt{79}}{5}$$

$$x = \frac{11\times\frac{7+\sqrt{79}}{5}+6}{2\times\frac{7+\sqrt{79}}{5}+1} = \frac{107+\sqrt{79}}{19+\sqrt{79}}$$

$$= \frac{(107+11\sqrt{79})(19-2\sqrt{79})}{47}$$

$$= \frac{295-5\sqrt{79}}{45} = \frac{59-\sqrt{79}}{9}$$, dem §. 238. gemäs.

Allgemein. Es sey z. B. der stetige Bruch

$$p+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{r}+\text{ u. s. w.}$$

gegeben. Man nenne den ganzen Bruch x, seinen periodischen Theil $r+\frac{1}{s}+\frac{1}{r}+$ u. s. w. $= y$; so hat man $x = p+\frac{1}{q+\frac{1}{y}}$; woraus man $y = \frac{x-p}{1-q(x-p)}$ erhält. Ferner $y = r+\frac{1}{s+\frac{1}{y}}$, woraus man erhält $sy^2-rsy-r = 0$;
und wenn man in dieser Gleichung den Werth von y substituirt, $s(x-p)^2-rs(x-p)(1-q(x-p))-r(1-q(x-p))^2 = 0$, eine Gleichung, die entwikkelt und nach x geordnet auf den zweyten Grad steigt.

Siebenzehentes Kapitel.

Ueber unbestimmte Aufgaben vom zweyten Grade.

Nachdem wir von den unbestimmten Aufgaben des ersten Grads ausführlich gehandelt haben, so werden einige Beyspiele, dergleichen man eine große Menge in den auf unsere Zeiten gekommenen Büchern Diophants findet, hinreichend seyn, um einen Begriff von den unbestimmten Aufgaben des zweyten Grads und den dabey zu gebrauchenden Methoden und Kunstgriffen zu geben.

§. 240.

Aufgaben. 1°. Zwey Quadratzahlen finden, deren Unterschied einer gegebenen Zahl a gleich sey.

Ben. Die eine sey x^2, die andere $(x \pm m)^2$; ihr Unterschied also $m^2 \pm 2mx$.

Bed. $m^2 \pm 2mx = a$.

Red. $2mx = \left.\begin{matrix} a - m^2 \\ m^2 - a \end{matrix}\right\}$;

Aufl. $x = \frac{a-m^2}{2m}$ oder $\frac{m^2-a}{2m}$; $x + m = \frac{a+m^2}{2m}$. Man nehme also eine beliebige Zahl m; so wird der Aufgabe Genüge geschehen, wenn man für die Wurzeln der beyden Quadratzahlen $\frac{a+m^2}{2m}$, und $\frac{a-m^2}{2m}$ oder $\frac{m^2-a}{2m}$ nimmt.

Probe. Es ist nämlich $\left(\frac{a+m^2}{2m}\right)^2 - \left(\frac{a-m^2}{2m}\right)^2 = \frac{4am^2}{4m_2} = a$. Und da für m jede beliebige Zahl genommen werden kan, so gibt es unendlich viele correspondirende Werthe der beyden Quadratzahlen, welche der Aufgabe Genüge leisten.

2°. Drey Zahlen finden, so daß das Produkt je zweyer um eine gegebene Zahl a vermehrt eine Quadratzahl mache.

Ben. Die gesuchten Zahlen seyen x, y, z.

Bed. $xy+a$ = einem Quadrat,
$yz+a$ = einem Quadrat,
$xz+a$ = einem Quadrat.

Red. Man nehme (verm. 1°.) zwey verschiedene Zahlen m, q, so daß m^2+a sowohl als q^2+a ein Quadrat sey. Sezt man nun $xy = m^2$, $yz = q^2$; so geschieht den beyden ersten Bedingungen Genüge; und man erhält $z = \frac{q^2x}{m^2}$. Vermöge der dritten Bedingung muß aber auch

$xz+a$, das ist, $\frac{q^2x_2}{m^2}+a$ ein Quadrat seyn;

es sey $= \left(\frac{qx}{m}-p\right)^2 = \frac{q^2x^2}{m}-\frac{2pqx}{m}+p^2$;

so ist $\frac{2pqx}{m} = p^2-a$

Aufl. Die Werthe $x = \frac{m(p^2-a)}{2pq}$

$$y = \frac{m^2}{x} = \frac{2mpq}{p^2-a}$$

$$z = \frac{q^2}{y} = \frac{q(p_2-a)}{2mp}$$

werden daher der Aufgabe Genüge leisten.

Probe. Man hat nämlich

$xy+a = m^2+a$ = einem Quadrat
$yz+a = q^2+a$ = einem Quadrat
} nach der Constr.

und $xz+a = \left(\frac{p^2-a}{2p}\right)^2+a = \left(\frac{p^2+a}{2p}\right)^2$.

3°. Eine Zahl finden, die zu jeder von zwey gegebenen Zahlen a, b addirt ein Quadrat mache.

Benen. Die gesuchte Zahl sey x.

Bed. $a+x$ = einem Quadrat,
$b+x$ = einem Quadrat.

Red. Gesezt a sey die grössere der beyden Zahlen a, die kleinere b; so muß a-b der Differenz zweyer Quadrate gleich werden. Man nehme irgend zwey ganze oder gebrochene Zahlen, worunter auch die Einheit seyn kan, m und n, deren Produkt = a-b sey. So muß mn der Differenz der beyden Quadrate gleich werden, deren einem die Größe a+x, dem andern die Größe b+x gleich seyn soll. Nun ist aber

$$mn = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2$$

Man hat also nur $a+x = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2$

$$b+x = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \text{ zu nehmen.}$$

Aufl. $x = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - a = \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 - b.$

Hätte man $a = 11$, $b = 3$ gegeben; mithin $a-b = 8$; so findet sich, indem man $m = 8$, $n = 1$ nimmt, $x = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 11 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 3 = \frac{37}{4}$.

4°. Drey Zahlen finden, so daß das Produkt je zweyer derselben um die Summe der nämlichen zwey vermehrt ein Quadrat mache.

Ben. Die gesuchte Zahlen seyen x, y, z.

Bed. $xy+x+y$ = einem Quadrat,
$yz+y+z$ = einem Quadrat,
$xz+x+y$ = einem Quadrat.

Red. Man bemerke zuvörderst, daß jede zwey zunächst auf einander folgende Quadratzahlen n^2, $(n+1)_2$ die Eigenschaft haben, daß ihr Produkt um ihre Summe vermehrt ein Quadrat sey.

In der That ist $n^2(n+1)^2+n^2+(n+1)^2$
$= n^4+n^2(2n+1)+n^2+(n+1)^2$
$= n^4+2n^2(n+1)+(n+1)^2$
$= (n^2+n+1)^2$.

Man seze demnach $x = n^2$, $y = (n+1)^2$; so geschieht der ersten Bedingung Genüge.

Nun sollen auch

$yz+y+z$, das ist, $(n^2+2n+2)z+(n+1)^2$,

und $xz+x+z$, das ist, $(n^2+1)z+n^2$ Quadrate werden;

folglich muß $(2n+1)(z+1)$ die Differenz zweyer Quadrate werden.

Nun ist allgemein

$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$; folglich $(2n+1)(z+1) = (\frac{1}{2}z+n+1)^2 - (\frac{1}{2}z-n)^2$

Man seze mithin $(n^2+2n+2)z+(n+1)^2 = (\frac{1}{2}z+n+1)^2$

$(n^2+1)z+n^2 = (\frac{1}{2}z-n)^2 = \frac{1}{4}z^2-nz+n^2$;

so erhält man $n^2+1 = \frac{1}{4}z-n$

Aufl. $x = n^2$, $y = (n+1)^2$, $z = 4(n^2+n+1)$ für jede Zahl n.

Probe. $n^2(n+1)^2+n^2+(n+1)^2 = (n^2+n+1)^2$ nach obigem.

$4(n+1)^2(n^2+n+1)+(n+1)^2+4(n^2+n+1)$

$= 4(n^2+2n+2)(n^2+n+1)+(n+1)^2$

$= 4(n^2+n+1)^2+4(n+1)(n^2+n+1)+(n+1)^2$

$= (2n^2+3n+3)^2$.

$4n^2(n^2+n+1)+n^2+4(n^2+n+1)$

$= 4(n^2+1)(n^2+n+1)+n^2$

$= 4(n^2+1)^2+4n(n^2+1)+n^2$

$= (2n^2+n+2)^2$

5°. Vier rechtwinkliche Triangel in ganzen Zahlen finden, die einerley Hypotenusen haben.

Man sagt von drey Zahlen, wie 3, 4, 5, daß sie Seiten eines rechtwinklichen Triangels seyen, wenn die Quadrate zweyer derselben zusammen dem Quadrat der dritten gleich sind, wie $3^2+4^2 = 5^2$; diese dritte heißt die Hypotenuse, die beyden andern die Seiten um den rechten Winkel eines solchen Triangels; in Beziehung auf die Ei-

genschaft rechtwinklicher Triangel, welche in der Geometrie erwiesen wird.

Da im allgemeinen $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$ ist; so kan man aus jeden zwey gegebenen ungleichen Zahlen a, b einen rechtwinklichen Triangel in Zahlen bilden, indem man zur Hypotenuse desselben a^2+b^2; und a^2-b^2, 2ab für die übrigen Seiten annimmt. Aus den Zahlen 2, 1 z. B. findet sich der rechtwinkliche Triangel 3, 4, 5; aus den Zahlen 3, 2 der rechtwinkliche Triangel 5, 12, 13.

Wenn vier Zahlen a, b, af, bf proportionirt sind, so sind der aus den zwey ersten und der aus den zwey lezten auf die angezeigte Art gebildete rechtwinkliche Triangel ähnlich; ihre Seiten a^2-b^2, 2ab, a^2+b^2, und $a^2f^2-b^2f^2$, 2af. bf, $a^2f^2+b^2f^2$ sind nämlich ebenfalls proportionirt.

Red. Man nehme zwey rechtwinkliche Triangel a, b, c; d, e, f, die einander nicht ähnlich seyen; und es seyen c, f ihre Hypotenusen; so sind af, bf, cf; und cd, ce, cf ebenfalls rechtwinkliche Triangel, welche einerley Hypotenusen haben. Nun ist ferner

$$(ad+be)^2+(ae-bd)^2 = a^2(d^2+e^2)+b^2(d^2+e^2)$$
$$= (a^2+b^2)(d^2+e^2)$$
$$= c^2f^2 \text{ (Voraus.)}$$

folglich ist auch ad+be, ae-bd, cf ein rechtwinklicher Triangel. Und ebenso wird ae+bd, ad-be, cf ein rechtwinklicher Triangel seyn.

Aufl. Man nehme die Zahlen a, b, c; d, e, f auf die angegebene Art; und man erhält

Seiten um den rechten Winkel		Gemeinschaftliche Hypotenuse
des ersten Triangels	af, bf,	
= zweyten . . .	cd, ce,	
= dritten . . .	ad+be, ae-bd,	cf
= vierten . . .	ae+bd, ad-be,	

Beyspiel. Nimmt man 3, 4, 5 und 5, 12, 13 für die Zahlen a, b, c; d, e, f; so erhält man die Triangel

39, 52, 65
25, 60, 65
16, 63, 65
33, 56, 65.

6°. Vier Zahlen von der Beschaffenheit finden, daß das Quadrat ihrer Summe um jede derselben vermehrt oder vermindert einem Quadrat gleich sey.

Ben. Die gesuchten Zahlen seyen x, y, z, t.

Bed. $(x+y+z+t)^2 \pm x$ = einem Quadrat
$(x+y+z+t)^2 \pm y$ = einem Quadrat
$(x+y+z+t)^2 \pm z$ = einem Quadrat
$(x+y+z+t)^2 \pm t$ = einem Quadrat.

Red. Da allgemein, wenn a die Hypotenuse, b, c die übrigen Seiten eines rechtwinklichen Triangels sind, so wohl a^2+2bc als a^2-2bc einem Quadrat gleich sind, jenes nämlich $=(b+c)^2$, dieses $=(b-c)$ oder $(c-b)^2$; so würde den Bedingungen, daß $Z^2 \pm x$, $Z^2 \pm y$, $Z^2 \pm z$, $Z \pm t$ Quadraten gleich seyn sollen, Genüge geschehen, wenn man für Z eine gemeinschaftliche Hypotenuse vier rechtwinklicher Triangel, und für x, y, z, t die doppelten Produkte der zwey übrigen Seiten jedes dieser Triangel nähme. Es seyen also (5°.) vier rechtwinkliche Triangel gefunden, deren gemeinschaftliche Hypotenuse a, und deren Seiten um den rechten Winkel b, c; d, e; f, g; h, k seyen. So ist auch, was immer X seyn mag, aX gemeinschaftliche Hypotenuse vier rechtwinklicher Triangel, deren übrige Seiten bX, cX; dX, eX; fX, gX; hX, kX sind. Und den Bedingungen, daß $Z \pm x$, $Z^2 \pm y$, $Z^2 \pm z$, $Z^2 \pm t$ Quadrate seyen, geschieht ebenfalls Genüge, wenn man

$Z = aX$; $x = 2bcX^2$,
$y = 2deX^2$,
$z = 2fgX^2$,
$t = 2hkX^2$ ſezt.

Nun ſoll aber
$Z = x+y+z+t$, d. i. $aX = 2(bc+de+fg+hk)X^2$ ſeyn;
folglich muß $X = \frac{a}{2(bc+de+fg+hk)}$ genommen werden.

Aufl. Man beſtimme die Zahlen a; b, c; d, e; f, g; h, k auf die angegebene Art; ſo werden die Werthe

$$x = \frac{bca^2}{2(bc+de+fg+hk)^2}$$

$$y = \frac{dea^2}{2(bc+de+fg+hk)^2}$$

$$z = \frac{fga^2}{2(bc+de+fg+hk)^2}$$

$$t = \frac{hka^2}{2(bc+de+fg+hk)}$$

der Aufgabe Genüge leiſten.

Probe. Da nach der Conſtruction erſtlich $a^2 = b^2+c^2$; daher $a^2 \pm 2bc = (b \pm c)^2$ iſt; ſo iſt

$$\left(\frac{bca^2}{2(bc+de+fg+hk)^2}+\frac{dea^2}{2(bc..hk)^2}+\frac{fga^2}{2(bc..hk)^2}+\frac{hka^2}{2(bc...hk)^2}\right)^2 \pm \frac{bca^2}{2(bc..hk)^2}$$

$$= \frac{a^4}{4(bc+de+fg+hk)^2} \pm \frac{bca^2}{2(bc+de+fg+hk)^2}$$

$$= \frac{a^2(a^2 \pm 2bc)}{4(bc+de+fg+hk)^2}$$

$$= \left(\frac{a(b \pm c)}{2(bc+de+fg+hk)}\right)^2$$

Und ſo weiter.

§. 241.

Es ſey nun eine Größe von der Form $\sqrt{a+bx+cx^2}$, wo a, b, c gegebene ganze Zahlen ſind, rational, oder die Größe $a+bx+cx^2$ einem Quadrate gleich zu machen: dieſes Quadrat ſey y. So erhält man

$$(2cx+b)^2 = 4cy^2+b^2-4ac$$

Es kommt also darauf an, die Größe $\sqrt{4cy^2+b^2-4ac}$, oder allgemein die Größe $\sqrt{Ay^2+B}$ rational zu machen, wo A, B gegebene positive oder negative ganze Zahlen sind, und y eine unbestimmte Zahl ist, die rational seyn soll.

Hätte man irgend eine Gleichung vom zweyten Grad mit zwey unbestimmten Größen, wie

$$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2=o,$$

und man sollte rationale Werthe von x und y finden, welche dieser Gleichung Genüge leisteten; so würde die Frage sich wiederum darauf reduciren lassen, eine Größe von der Form $\sqrt{Ay^2+B}$ rational zu machen.

In der That erhält man, wenn man den Werth von y in x ausdrükt,

$$2fy+ex+c=\sqrt{(c+ex)^2-4f(a+bx+dx^2)}$$

oder wenn man $c_2-af=\alpha$

$$2ce-4bf=\beta$$

$$e^2-4df=\gamma \text{ sezt;}$$

$$2fy+ex+c=\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2};$$

und folglich ist dieser Fall auf den vorhergehenden reducirt.

Das Rationalmachen der Formel $\sqrt{Ay^2+B}$ nun betreffend, so reduciren sich alle von Diophant behandelten Probleme auf die speciellen Fälle, da entweder A oder B ein Quadrat ist.

Wirklich, wenn A ein Quadrat ist, z. B. $=a^2$, seze man $a^2y^2+B=(ay+z)^2=a^2y^2+2ayz+z^2$,

so erhält man $B=2ayz+z^2$,

$y=\frac{B-z^2}{2az}$, wo man für z irgend eine beliebige Zahl nehmen kan.

Ist B ein Quadrat, z. B. $=b^2$; so seze man

$$Ay^2+b^2=(zy+b)^2=z^2y^2+2bzy+b^2;$$

so erhält man $A=z^2y+2bz$,

$y=\frac{2bz}{A-z^2}$, wo man wiederum für z jede beliebige Zahl nehmen kan.

Gesezt z. B. man verlangte zwey Quadrate; die einem gegebenen Quadrate b^2 gleich wären; so hätte man $\sqrt{b^2-y^2}$ rational zu machen, und $B = b^2$, $A = -1$. Man findet hieraus $y = \frac{-2bz}{1+z^2}$, und $\sqrt{b^2-y^2} = b+zy = \frac{b(1-z^2)}{1+z^2}$. Wirklich ist $\left(\frac{b(1-z^2)}{1+z^2}\right)^2 + \left(\frac{2bz}{1+z^2}\right)^2 = b^2$. Die zwey übrigen Seiten eines rechtwinklichen Triangels, dessen Hypotenuse b gegeben ist, kan man demnach von der Form $\frac{b(1-z^2)}{1+z^2}$, $\frac{2bz}{1+z^2}$ nehmen.

Für die allgemeine Auflösung der Gleichung $Ay + B = x^2$, wo A, B irgend welche gegebene Zahlen vorstellen, hat Lagrange zuerst eine allgemeine Methode gegeben. Man sehe den fünften Paragraphen seiner Zusäze zum zweyten Theil der Eulerischen Algebra.

§. 242.

Wir haben oben §. 237. bewiesen, daß es von der Gleichung $t^2 - Au^2 = 1$, wo t, u unbestimmte ganze Zahlen und A eine gegebene Zahl ist, die kein Quadrat ist, immer unendlich viele Auflösungen gebe. Ich werde nun zeigen, wie man aus den zwey kleinsten Werthen von t und u alle übrigen finden kan.

Lehnsaz.

$(x^2 - Ay^2)(x'^2 - Ay'^2) = (xx' \pm Ayy')^2 - A(xy' \pm x'y)^2$.

Es sind nämlich beyde Ausdrüke

$= xx'^2 - A(y^2x'^2 + x^2y'^2) + A^2y^2y'^2$

Saz. Wenn t' und u' zwey gegebene Werthe von A und u sind, und T, V zwey andere Werthe, welche der Gleichung $t^2 - Au^2 = 1$ Genüge leisten; so behaupte ich, daß auch $t'T + Au'V$, $u'T + t'V$ zwey solche Werthe seyen.

Denn vermöge des vorhergehenden Lehnsazes ist

$(t'T + Au'V)^2 - A(u'T + t'V)^2 = (t'^2 - Au'^2)(T^2 - AV^2)$

also vermöge der Vorausseзung $= 1 = t^2 - Au^2$.

Zusaz. Man erhält ferner

$t \pm u\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})(T \pm V\sqrt{A})$

Anwendung. Sind t', u' die kleinsten Werthe, welche der Gleichung $t^2 - Au^2 = 1$ Genüge leisten; so erhält man vermöge des vorhergehenden Satzes, wenn man t', u' statt T, V sezt, die zweyten Werthe von t und u

$$t'' = t'^2 + Au'^2, \qquad u'' = 2u't'$$

Und wenn man diese statt T, V sezt, die dritten

$t''' = t'(t'^2 + Au'^2) + Au'.2u't'$, $u''' = u'(t'^2 + Au'^2) + t'.2u't'$

$= t'(t'^2 + 3Au'^2)$, $= u'(3t'^2 + Au'^2)$

Und so fort die vierten, fünften u. s. w.

Um aber einen allgemeinen Ausdruk für diese Werthe zu bekommen, bemerke man:

Da $t \pm u\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})(T \pm V\sqrt{A})$;

so erhält mau, indem man t', u' für T, V sezt,

$t'' \pm u''\sqrt{A} = (A' \pm u'\sqrt{A})_2$,

$t''' \pm u'''\sqrt{A} = (t'' \pm u''\sqrt{A})(t' \pm u'\sqrt{A}) = (t' \pm u'\sqrt{A})^3$;

Ebenso $t^{IV} \pm u^{IV}\sqrt{A} = (t' \mp u'\sqrt{A})^4$, u. s. w.

Und allgemein $t \pm u\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})^m$ für jede ganze positive Zahl m.

woraus sich $t = \frac{(t' + u'\sqrt{A})^m + (t' - u'\sqrt{A})^m}{2}$,

$u = \frac{(t' + u'\sqrt{A})^m - (t' - u'\sqrt{A})^m}{2\sqrt{A}}$ findet;

welche Formeln unerachtet ihrer scheinbaren Divisoren immer ganze Zahlen geben, nämlich wenn man entwikkelt,

$t = t'^m + \frac{m(m-1)}{1.2} t'^{m-2}Au'^2 + \frac{m...(m-3)}{1..4} t'^{m-4}A^2u'^4 + \frac{m...(m-5)}{1...6} t'^{m-6}$

$A^3u'^6 + u.$ s. w.

$u = \frac{m}{1} t'^{m-1}u' + \frac{m..(m-2)}{1.2.3} t'^{m-3}Au'^3 + \frac{m...(m-4)}{1...5} t'^{m-5}A^2u'^5 + u.$ s. w.

wo beyde Reyhen abbrechen, weil m eine positive ganze Zahl ist (§. 164.).

Zusaz. Gesezt man habe eine Auflösung der Gleichung $p_1^2 - Aq_2 = B$ in ganzen Zahlen gefunden, und es seyen p', q' die gefundenen Werthe von p, q; so lassen sich aus denselben vermittelst der unzähligen Werthe, welche die Glei-

chung $t^2 - Au^2 = 1$ auflösen, unendlich viele andere Auflösungen herleiten.

In der That, da $p'^2 - Aq'^2 = B$

und $t^2 - Au^2 = 1$ nach der Voraussezung;

ist auch $\overline{(p'^2 - Aq'^2}\,(t^2 - Au^2)$

das ist, vermöge des obigen Lehnsazes,

$$(p't \pm Aq'u)^2 - A(pu \pm q't)^2 = B = p^2 - Aq^2;$$

man hat also nur für irgend zwey correspondirende Werthe von t, u,

$$p = p't \pm Aq'u,$$
$$q = p'u \pm q't \text{ zu machen.}$$

§. 243.

Was nun die allgemeine Auflösung der Gleichung $x^2 - Ay^2 = B$ durch ganze, nicht blos rationale Werthe von x, y betrift, wo A und B gegebene ganze positive oder negative Zahlen sind, deren keine eine Quadratzahl ist; so ist in §§. 237. 238. eine Methode angegeben worden, die Gleichungen

$$p^2 - Aq^2 = \pm B, \text{ wenn } B < \sqrt{A},$$

$Ap_2 + Bpq + Cq^2 = \pm D$, wenn $B^2 > 4AC$, und $D < \frac{1}{2}\sqrt{B^2 - 4AC}$ ist, wenn es möglich ist, in ganzen Zahlen aufzulösen. Man findet in dem siebenten Paragraphen der schon angeführten Zusäze von Lagrange zur Eulerischen Algebra die allgemeine Auflösung der Gleichung $x^2 \pm Ay^2 = \pm B$, wo A und B irgend welche gegebene ganze Zahlen vorstellen, in ganzen Zahlen, besonders durch Reduction, wo es angeht, auf die vorhin genannten speciellen Fälle; und somit weitere interessante Anwendungen der im vorhergehenden Kapitel vorgetragenen Methode, Wurzeln quadratischer Gleichungen durch stetige Brüche auszudrüken, auf die Auflösung unbestimmter Gleichungen vom zweyten Grade.

Ende des zweyten und lezten Theils.

Drukfehler und Verbesserungen im ersten Theil.

S. 34. Z. 22. lese man c statt a
— — Z. 23. = = a = c
— 125. Z. 4. von unten l. 17 Loth = 16
— 182. Z. 12. = = l. $\frac{209}{780}$, $\frac{780}{2911}$, $\frac{2911}{10864}$, ... statt $\frac{209}{786}$, $\frac{786}{2935}$, u. s. w.
— — Z. 10. = = l. $\frac{1351}{780}$, $\frac{5042}{2911}$, $\frac{18817}{10864}$ .... statt $\frac{1363}{786}$, u. s. w.
— — Z. 8. = = l. beständig grösser statt wechselsweise grösser und kleiner
— — Z. 7, 6. = = l. immer um eine Einheit grösser sind statt wechselsweise um eine Einheit grösser und kleiner sind

im zweyten Theil.

— 159. Z. 3. lese man p^m statt $\frac{1}{p^m}$
— 160. Z. 23. lese man $p^m \times p^{m'}$ = $pm \times pm'$
— 162. Z. 13. = = 10^n = $10n$
— 165. Z. 20. seze man als Kennziffer 3 = 4
— — Z. 3. von unten . . . 4 = 5
— 166. Z. 8. . . . 4 = 5
— — Z. 13. lese man Log. 5436 = 5456
— 173. Z. 15. streiche man Log. aus.
— 177. Z. 14. lese man $-s'$ = $+s$
— 180. Z. 15. = = 5600 = 6500
— 181. Z. 1. = = 3.7781512 = 3.7781012

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

L'Huilier, Simon Antoine Jean,

Lhuilier's Professor der Mathematik in Genf, Anleitung zur ElementarAlgebra

Bd.: 2

Tübingen (1801)

Math.p. 314-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082311-4
VD18 90261976